УДК 621.3.013.2

И.А. КОСТЮКОВ, аспирант, НТУ "ХПИ"

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ РАССМОТРЕНИИ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Рассматриваются вопросы, связанные с решением интегральных уравнений которыми описывается распределение поверхностной плотности вторичных источников. Разработаны алгоритмы решения интегральных уравнений теории потенциала.

Ключевые слова: уравнение Фредгольма, вторичные источники, плотность двойного слоя, внутренняя задача Дирихле.

Введение. При рассмотрении электромагнитных полей в средах с кусочно-однородными электрофизическими характеристиками одним из возможных методов расчета есть метод вторичных источников [1]. Данный метод, как известно, заключается в замене неоднородной среды на однородную при помощи введения дополнительных источников поля, которые наведены на границах раздела. Уравнения метода вторичных источников для плоскопараллельного поля аналогичны интегральным уравнениям теории потенциала для решения внутренних или внешних краевых задач на плоскости, когда решение первой краевой задачи ищется в виде логарифмического потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, а решение второй краевой задачи – в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью [2, 3]. Отличие, впрочем, заключается в числовом параметре, который часто бывает близок к характеристическому, что может приводить к погрешностям при решении. В связи с указанной аналогией довольно актуальной может являться разработка алгоритмов решения таких задач, тем более что распространенные прикладные программы решения различных полевых задач, реализующие различные численные методы могут вызывать недоверие с точки зрения достоверности полученных результатов. Актуальность, кроме того, обусловлена тем, что интегральные уравнения для внутренней первой краевой задачи и внешней второй краевой задачи имеют сопряженные ядра (аналогично и для внешней первой и внутренней второй краевых задач), то есть по одним и тем же алгоритмам возможно получение решения нескольких задач.

Целью работы является разработка алгоритмов решения интегрального уравнения для внутренней задачи Дирихле, проверка полученных результатов путем сравнения полученных решений с аналитическими. Интерес именно к этой задаче вызван сопряженностью ядер интегральных уравнений для внутренней первой и внешней второй краевых задач. В то же время внешняя задача Неймана может иметь значение в таких приложениях как, например, рассмотрение экранирующей способности магнитных экранов, поскольку поле, созданное простым слоем токов намагниченности, с внешней стороны от ферромагнитного тела вычитается из поля созданного намагничивающими токами.

Основной материал. Для случая, когда вторичным источником является простой слой вторичных токов намагниченности, распределение поверхностной плотности тока на границе раздела сред описывается уравнением Фредгольма второго рода, которое для плоскопараллельного поля запишем в виде [4].

$$\sigma(Q)+\frac{\lambda}{\pi}\int_{l}\sigma(M)\frac{\cos(r_{QM},n_Q)}{r_{QM}}dl=-F(Q), \qquad (1)$$

где Q, M – произвольные точки на контуре интегрирования, $F(Q)$ – свободный член, всегда известная функция, которая определяется распределением токов проводимости в рассматриваемой задаче, σ – искомая поверхностная плотность связанного тока намагниченности, λ – числовой параметр, который для слабонасыщенной стали можно принять равным 1, r_{QM} – расстояние между точками контура, n_Q – нормаль к контуру в точке Q. Известно, что решение уравнения (1) для слабонасыщенной стали эквивалентно решению внешней или внутренней задачи Неймана [4]. Ядра интегральных уравнений первой и второй краевых задач сопряженные, точки Q и M в них меняются местами, в тоже время для внутренней задачи Дирихле имеем уравнение (для случая, если контур ограничивающий область задан параметрически) [5].

$$x=a\cos t\,,\; y=b\sin t\,; \qquad (2)$$

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_{l}\mu(\tau)\frac{\cos(\nu,r)}{r}dl=f(t), \qquad (3)$$

где μ – искомая плотность двойного слоя, t, τ – значения параметра, который определяет положение точки на кривой которая ограничивает область в которой ищется решение задачи, который в данном случае меняется от 0 до 2π, ν – внешняя нормаль к контуру в точке τ, dl – элемент длины дуги, $f(t)$ – заданная функция, граничное условие. При этом ядро интегрального уравнения, пропуская промежуточные преобразования, можно переписать в виде [6].

$$K(t,\tau) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{y(t)-y(\tau)}{x(t)-x(\tau)} = -\frac{1}{\pi}\frac{0.5ab}{a^2\sin^2\left(\frac{t+\tau}{2}\right)+b^2\cos^2\left(\frac{t+\tau}{2}\right)} \quad (4)$$

Один из наиболее распространенных способов решения здесь – квадратурный. Интеграл в уравнении заменяют конечной суммой и приводят к системе линейных алгебраических уравнений. В качестве приближенных формул интегрирования используем квадратурные формулы Гаусса-Лежандра с 16 узлами и прямоугольников с 3600 узлами.

При этом заметим, что при применении формул Гаусса-Лежандра узлы находим в виде [7]:

$$t_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_{i,} \quad (5)$$

где b, a – соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, x_i – приведенные в [7] нули полинома Лежандра, то есть те x_i для которых по определению полинома Лежандра имеем:

$$P_n(x_i) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx_i^n}[(x_i^2-1)^n] = 0\,. \quad (6)$$

После чего при применении формул Гаусса-Лежандра производят пересчет весов квадратурной формулы, которые в [8] приведены для стандартного промежутка [-1, 1].

$$A_i = \frac{b-a}{2}C_{i,} \quad (7)$$

где C_i – весы квадратурной формулы, приведенные для промежутка [-1, 1], A_i – весы квадратурной формулы для рассматриваемого промежутка интегрирования.

Система линейных алгебраических уравнений решалась методом Гаусса, после чего решение (для случая с 16 узлами интегрирования) интерполируется полиномом.

При определении точности разработанных алгоритмов решения, полученные при решении уравнения (2) с применением указанных квадратурных формул, сравним с точными решениями полученными аналитически. Так, решение внутренней задачи Дирихле, искомую гармоническую функцию $u(r, \varphi)$ для круга радиуса R обычно получают умножением членов разложения граничного условия в ряд Фурье на отношение $(r/R)^n$, где n принимает значения от 0 до бесконечности. Поставим модельную задачу, допускающую аналитическое решение:

$$\Delta u = 0,\ 0 \le r < 20,\ u_{r=20} = 20\cos^3 \varphi\,. \tag{8}$$

Которая имеет своим решением функцию вида:

$$u(r,\varphi) = 15\frac{r}{R}\cos(\varphi) + 5\frac{r}{R}\cos(3\varphi)\,. \tag{9}$$

На рис. приведено решение (на границе области) уравнения (2) для указанной краевой задачи.

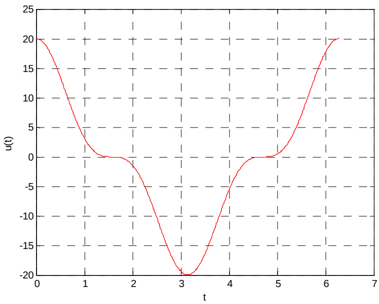

Рис. – Зависимость решения задачи (8) от параметра t.

В табл. приведены значения искомой функции полученные при применении формул прямоугольников и Гаусса-Лежандра а также точное аналитическое решение, полученное по формуле (9), при 3 произвольно выбранных различных значениях параметра (t).

Таблица – Различные решения задачи (7) при 3 произвольных значениях параметра (t).

	t = 1,7471	t =3,3912	t = 4,2708
Точное решение	-0,1079	-18,1979	-1,561
Решение по формуле прямоугольников	-0,1078	-18,1980	-1,561
Решение по формуле Гаусса-Лежандра	-0,1077	-18,1973	-1,556

Выводы: Разработанные алгоритмы решения интегрального уравнения для внутренней задачи Дирихле обеспечивают достаточную точность решения. В дальнейшем актуальной является разработка аналогичных алгоритмов для внутренней второй и внешней первой краевых задач.

Список литературы: **1.** *Тозони О.В.* Метод вторичных источников в электротехнике / *О.В. Тозони*. – М.: Энергия, 1975. – 296 с. **2.** *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям / *С.Г. Михлин*. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 234 с.

3. *Михайлов В.М.* Расчет электрических и магнитных полей с помощью интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / *ВМ. Михайлов.* – К.: УМК ВО, 1988. – 60 с. **4.** *Тозони О.В.* Расчет электромагнитых полей на вычислительных машинах / *О.В. Тозони.* – Киев.: Техника, 1967. – 252 с. **5.** *Михлин С.Г.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / *С.Г. Михлин., Х.Л. Смолицкий.* – М.: Наука, 1965. – 384 с. **6.** *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / *Л.В. Канторович, В.И. Крылов.* – М. – Л.: Физматлит, 1962. – 708 с. **7.** *Демидович Б.П.* Основы вычислительной математики / *Б.П. Демидович, И.А. Марон.* – М.: Наука, 1966. – 664 с. **8.** *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов / *В.И. Крылов.* – М.: Наука, 1967. – 500 с.

Поступила в редколлегию 15.05.2013

УДК 621.3.013.2

Численный эксперимент при рассмотрении уравнений метода вторичных источников / Костюков И.А. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2013. – № 35 (1008). – С. 65-69. Бібліогр.: 8 назв.

Розглянуті питання які пов’язані із вирішенням інтегральних рівнянь якими описується розподіл щільності вторинних джерел. Розроблені алгоритми вирішення інтегральних рівнянь теорії потенціалу.

Ключові слова: рівняння Фредгольма, вторинні джерела, щільність подвійного шару, внутрішня задача Діріхле.

Questions connected with solving integral equations that describe the distribution of secondary sources density are considered. Algorithms for the potential problems solving are developed.

Keywords: Fredholm equation, secondary sources, density of double layer, inner Dirichlet problem.