

**К. В. ЧУНИХИН**

### **ВЛИЯНИЕ ОБМОТКИ И МЕРИДИАННОГО СЕЧЕНИЯ СЕРДЕЧНИКА НА МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТА**

Описана проблема, возникающая при проектировании электромагнитов постоянного тока, которая связана с ограничением применения известных методов расчета магнитного момента электромагнита. Проведен анализ влияния неоднородности внешнего магнитного поля намагничивающей катушки на магнитный момент электромагнита для определения границ применимости допущения однородности внешнего магнитного поля. Для этого был использован итерационный алгоритм численного решения интегрального уравнения относительно поверхностной плотности фиктивных магнитных зарядов, находящихся на поверхностях цилиндрических элементов сердечника, с учетом неоднородности внешнего магнитного поля. Установлено, что основной причиной расхождения между значениями магнитного момента сердечника электромагнита и сердечника, расположенного в однородном магнитном поле, является степень неоднородности внешнего магнитного поля катушки, а также участок кривой намагничивания, на который попадает напряженность результирующего магнитного поля для преобладающей части сердечника. Указано, что область применения допущения однородности внешнего магнитного поля ограничена относительной длиной сердечника и уровнем внешнего магнитного поля. Исследовано влияние формы меридианного сечения сердечника на магнитный момент электромагнита. Для сердечника с шайбами был применен итерационный алгоритм с разбиением среды сердечника как на цилиндрические, так и на кольцевые элементы для учета дополнительного краевого эффекта, обусловленного наличием шайб. Результаты расчета показали, что их наличие дает существенный вклад в магнитный момент электромагнита, иногда дающий рост в два раза, а уровень вклада зависит от положения и размеров шайб, а также на каком участке кривой намагничивания находится напряженность результирующего магнитного поля для большей части сердечника в отсутствие шайб. Показано, что с увеличением радиуса шайб и уменьшением расстояния от шайб до торцов растет магнитный момент электромагнита, что более выражено для коротких сердечников и менее выражено для длинных.

**Ключевые слова:** магнитный момент электромагнита, неоднородное внешнее магнитное поле, катушка, сердечник, участок кривой намагничивания, шайба.

**К. В. ЧУНИХИН**

### **ВПЛИВ ОБМОТКИ І МЕРИДІАННОГО ПЕРЕРІЗУ ОСЕРДЯ НА МАГНІТНИЙ МОМЕНТ ЕЛЕКТРОМАГНІТА**

Описана проблема, що виникає при проектуванні електромагнітів постійного струму, яка пов'язана з обмеженням застосування відомих методів розрахунку магнітного моменту електромагніта. Проведено аналіз впливу неоднорідності зовнішнього магнітного поля котушки, що намагнічує, на магнітний момент електромагніта для визначення меж застосовності допущення однорідності зовнішнього магнітного поля. Для цього був використаний ітераційний алгоритм чисельного розв'язання інтегрального рівняння відносно поверхневої густини фіктивних магнітних зарядів, що знаходяться на поверхнях циліндричних елементів осердя, з урахуванням неоднорідності зовнішнього магнітного поля. Встановлено, що основною причиною розбіжності між значеннями магнітного моменту осердя електромагніту і осердя, розташованого в однорідному магнітному полі, є ступінь неоднорідності зовнішнього магнітного поля котушки, а також ділянка кривої намагнічування, на яку потрапляє напруженість результуючого магнітного поля для переважної частини осердя. Вказано, що область застосування допущення однорідності зовнішнього магнітного поля обмежена відносною довжиною осердя та рівнем зовнішнього магнітного поля. Досліджено вплив форми меридіанного перерізу осердя на магнітний момент електромагніта. Для осердя із шайбами був застосований ітераційний алгоритм з розбиттям середовища осердя як на циліндричні, так і на кільцеві елементи для врахування додаткового крайового ефекту, обумовленого наявністю шайб. Результати розрахунку показали, що їх наявність дає істотний внесок у магнітний момент електромагніта, що іноді дає зростання в два рази, а рівень внеску залежить від положення і розмірів шайб, а також на якій ділянці кривої намагнічування знаходиться напруженість результуючого магнітного поля для більшої частини осердя в відсутності шайб. Показано, що зі збільшенням радіуса шайб і зменшенням відстані від шайб до торців зростає магнітний момент електромагніта, що більш виражено для коротких осердь менш виражено довгих.

**Ключові слова:** магнітний момент електромагніта, неоднорідне зовнішнє магнітне поле, котушка, осердя, ділянка кривої намагнічування, шайба.

**K. V. CHUNIKHIN**

### **THE INFLUENCE OF THE WINDING AND THE MERIDIAN SECTION OF THE CORE ON THE MAGNETIC MOMENT OF THE ELECTROMAGNET**

The problem arising in the design of DC electromagnets, which is associated with the limitation of the application of the known methods for calculating the magnetic moment of an electromagnet, is described. The influence of the nonuniformity of the external magnetic field of the magnetizing coil on the magnetic moment of an electromagnet is analyzed to determine the limits of applicability of the assumption of uniformity of the external magnetic field. For this purpose, an iterative algorithm was used to numerically solve the integral equation for the surface density of fictitious magnetic charges on the surfaces of cylindrical elements of the core, considering the nonuniformity of the external magnetic field. It is established that the main cause of the discrepancy between the magnetic moment of the core of the electromagnet and the core, located in a uniform magnetic field, is the degree of nonuniformity of the external magnetic field of the coil, as well as the section of the magnetization curve, which corresponds to the strength of the resulting magnetic field for the dominant part of the core. It is indicated that the region of application of the assumption of uniformity of the external magnetic field is limited by a relative core length and level of an external field. The influence of the shape of the meridian section of the core on the magnetic moment of the electromagnet is investigated. For core with washers, an iterative algorithm was used with a partitioning of the core medium into both cylindrical and ring elements to account for the additional edge effect due to the presence of washers. The results of the calculation have shown that their presence makes a significant contribution to the magnetic moment of the electromagnet, sometimes giving growth twice, and the level of contribution depends on the position and size of the washers, as well as on which section of the magnetization curve is the strength of the resulting magnetic field for most of the core in the absence of washers. It is shown that with increasing

©К. В. Чунихин, 2019

washer radius and a decrease of the distance from the washer to the ends the magnetic moment of the electromagnet increases, which is more pronounced for short cores and less pronounced for long cores.

**Keywords:** magnetic moment of an electromagnet, nonuniform external magnetic field, coil, core, section of magnetization curve, washer.

**Введение.** Ключевым фактором управления космического аппарата при помощи магнитных исполнительных органов является магнитный момент электромагнита [1]. Для достижения необходимого его значения решают задачу минимизации массы сердечника электромагнита и энергетических затрат, необходимых для питания намагничивающей катушки. При этом находят оптимальную относительную длину сердечника в зависимости от магнитных свойств материала и обмоточных данных катушки. В последнее время для увеличения магнитного момента электромагнита усложняют форму меридианного сечения сердечника [1], а также уменьшают длину катушки при сохранении ее магнитодвижущей силы.

Основная проблема при проектировании электромагнитов заключается в том, что известных работах [1–8] применяют недостаточно строго обоснованную математическую модель расчета магнитного поля электромагнита. Широко распространенные методы расчета магнитного момента с применением коэффициентов размагничивания [1–4] имеют ряд ограничений, в частности, это необходимость их экспериментального определения [1–2] или определение их при допущении постоянства магнитной проницаемости [3–4]. Однако, как это было показано в работе [9], неоднородность намагничивания сердечника, расположенного в однородном магнитном поле, противоречит допущению постоянства магнитной проницаемости. Расчет магнитного поля цилиндрического сердечника, расположенного в однородном магнитном поле, при помощи интегральных уравнений осуществлено в работах [5–8], причем в [5–7] магнитная проницаемость считалась постоянной.

В рассматриваемых работах не уделено внимание вопросу о влиянии неоднородности внешнего магнитного поля, создаваемого катушкой, на магнитный момент сердечника. Кроме того, представляет интерес влияние формы меридианного сечения сердечника на его магнитный момент.

**Целью** данной работы является анализ влияния неоднородного внешнего магнитного поля катушки, а также формы меридианного сечения сердечника на магнитный момент сердечника и электромагнита в целом.

**Анализ влияния катушки на магнитный момент цилиндрического сердечника и электромагнита.** Рассмотрим электромагнит постоянного тока, представляющий собой цилиндрический сердечник длины  $b$  радиуса  $R$  из пермаллоя 50Н, расположенный соосно с намагничивающей катушкой с внутренним  $R$  и наружным  $R_c$  радиусами и длиной  $L_c = b$ , в неограниченном немагнитном и непроводящем пространстве (рис. 1). Катушка имеет  $w$  витков с диаметром витка  $d_c$ , по которым течет ток  $I_c$ . Магнитный момент такой системы, в силу осевой

симметрии плоскомеридианного магнитного поля, будет иметь только осевую проекцию:

$$M_{em} = M_z + M_c, \quad (1)$$

где  $M_z$  и  $M_c$  – осевые проекции магнитного момента сердечника и катушки;

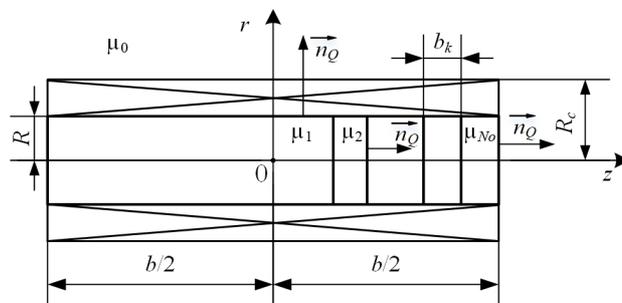


Рис. 1. Меридианное сечение электромагнита с сердечником цилиндрической формы

Эти проекции определяются следующим образом [1, 9]:

$$M_z = 4\pi \int_S r_M J_z(M) dS_M; \quad (2)$$

$$M_c = I_c \pi \sum_{k=1}^w r_k^2, \quad (3)$$

где  $J_z(M)$  – осевая проекция вектора намагниченности;

$S, dS_M$  – часть площади меридианного сечения в положительной полуплоскости  $z > 0$  и его элемент с центром в точке  $M$ ;

$M \in S$  – точка с текущими координатами;

$r_M, r_k$  – радиальные цилиндрические координаты точки  $M$  и  $k$ -го витка катушки.

Для определения  $J_z$  внутри сердечника необходимо рассчитать магнитное поле, напряженность которого представляем в таком виде [10, 11]:

$$\vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_m, \quad (4)$$

где  $\vec{H}_c$  – напряженность внешнего магнитного поля, создаваемого катушкой;

$\vec{H}_m$  – напряженность магнитного поля, обусловленного магнитными свойствами сердечника.

Проводник, из которого намотана катушка, является относительно тонким. Поэтому, заменяя витки катушки их геометрическими осями и пренебрегая винтовым характером намотки, имеем формулы для расчета соответственно радиальной и осевой проекций  $\vec{H}_c$  [12]:

$$H_{cr}(Q) = \frac{I_c}{2\pi} \sum_{k=1}^w \left\{ \frac{z_Q - z_k}{r_Q \sqrt{(r_k + r_Q)^2 + (z_Q - z_k)^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{r_k^2 + r_Q^2 + (z_Q - z_k)^2}{(r_k - r_Q)^2 + (z_Q - z_k)^2} E(k_c) - K(k_c) \right] \right\}; \quad (5)$$

$$H_{cz}(Q) = \frac{I_c}{2\pi} \sum_{k=1}^w \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r_k + r_Q)^2 + (z_Q - z_k)^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ K(k_c) + \frac{r_k^2 - r_Q^2 - (z_Q - z_k)^2}{(r_k - r_Q)^2 + (z_Q - z_k)^2} E(k_c) \right] \right\}, \quad (6)$$

где  $Q$  – точка наблюдения;  
 $K(k_c), E(k_c)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля  $k_c$  [13];

$$k_c = 2 \sqrt{\frac{r_Q r_k}{(z_Q - z_k)^2 + (r_Q + r_k)^2}};$$

$r_Q$  и  $z_Q, z_k$  – радиальная цилиндрическая координата точки  $Q$  и осевые цилиндрические координаты точки  $Q$  и  $k$ -го витка.

Поле вектора  $\vec{H}_m$  является потенциальным и связано со скалярным потенциалом  $\varphi_m$  соотношением

$$\vec{H}_m = -\text{grad } \varphi_m. \quad (7)$$

Используя электростатическую аналогию [10, 14], представляем  $\varphi_m$  в таком виде [15, 16]:

$$\varphi_m(Q) = \frac{1}{\pi \mu_0} \int_l \frac{\sigma_m(M) r_M K(k)}{\sqrt{(z_Q - z_M)^2 + (r_Q + r_M)^2}} dl_M, \quad (8)$$

где  $l, dl_M$  – контур меридианного сечения и его элемент с центром в точке  $M$ ;

$M \in l$  – точка с текущими координатами;

$\sigma_m(M)$  – поверхностная плотность фиктивных магнитных зарядов;

$\mu_0$  – магнитная постоянная;

$z_M$  – осевая цилиндрическая координата точки  $M$ .

Модуль  $k$  вычисляется по такой же формуле, как и  $k_c$ , если в нем заменить координаты  $r_k, z_k$  на  $r_M, z_M$ .

Для определения  $\sigma_m$  при помощи итерационного алгоритма [9, 17] решаем интегральное уравнение для неоднородно намагничиваемой и нелинейной среды цилиндрического сердечника [17], которое в случае неоднородного внешнего магнитного поля  $\vec{H}_c$  принимает вид:

$$\sigma_m(Q) - \frac{\lambda_\mu}{\pi} \int_{l-l_3} \sigma_m(M) [s(Q, M) - s(Q, M')] dl_M - \\ - \frac{\lambda_\mu}{\pi} \sum_{k=1}^{N_o-1} \sigma_m(M_k) \int_{l_k} [s(Q, M) - s(Q, M')] dl_M = \\ = 2\mu_0 \lambda_\mu H_{cn}(Q), \quad (9)$$

где  $l = l_1 + l_2 + l_3$ ,  $l$  – суммарный контур меридианного сечения сердечника в расчетной области (первая четверть координатной плоскости  $zOr$ );

$l_1$  и  $l_2$  – контуры боковой и торцевой поверхностей;

$$l_3 = \sum_{k=1}^{N_o-1} l_k^c, \quad l_k^c - \text{граница между } k \text{ и } k+1$$

цилиндрическими элементами в расчетной области;

$N_o$  – общее число однородных цилиндрических элементов в положительной полуплоскости ( $z > 0$ ) с абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu_k, k = \overline{1, N_o}$ ,

имеющих длину  $b_k$ , причем  $\sum_{k=1}^{N_o} b_k = b/2$  (рис. 1);

$$H_{cn}(Q) = H_{cr}(Q) \text{ для } Q \in l_1 \text{ и } H_{cn}(Q) = H_{cz}(Q) \text{ для } Q \in l_2 \cup l_3;$$

$$\lambda_\mu = \begin{cases} (\mu_k - \mu_0)/(\mu_k + \mu_0), & Q \in l_1 \cup l_2; \\ (\mu_k - \mu_{k+1})/(\mu_k + \mu_{k+1}), & Q \in l_3; \end{cases}$$

$M'$  – точка, симметричная точке  $M$  относительно оси  $r$ .

Функция  $S(Q, M)$  интегрального уравнения (9) принимает следующий вид: при  $Q \in l_1$   $S(Q, M) = S_r(Q, M)$ ; при  $Q \in l_2 \cup l_3$  –  $S(Q, M) = S_z(Q, M)$ , где

$$S_r(Q, M) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{r_M}{r_Q^3}} \left[ K(k) + \frac{1}{k'^2} \left( \frac{r_M + r_Q}{2r_M} k^2 - 1 \right) E(k) \right];$$

$$S_z(Q, M) = \frac{z_Q - z_M}{4\sqrt{r_Q^3 r_M}} \frac{k^3}{k'^2} E(k); \quad k' - \text{дополнительный}$$

модуль полных эллиптических интегралов,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  [13]. Отметим, что  $S_r(Q, M'), S_z(Q, M')$  определяется по таким же формулам, как и  $S_r(Q, M), S_z(Q, M)$ , если в них заменить координаты точки  $M$  на  $M'$ .

Проекция вектора  $\vec{H}_m$  определяем следующим образом:

$$H_{mr}(Q) = \frac{1}{2\pi \mu_0} \int_l \sigma_m(M) [S_r(Q, M) - S_r(Q, M')] dl_M; \quad (10)$$

$$H_{mz}(Q) = \frac{1}{2\pi \mu_0} \int_l \sigma_m(M) [S_z(Q, M) - S_z(Q, M')] dl_M. \quad (11)$$

Применяя итерационный алгоритм, формулы (5) и (6), (10) и (11), найдем проекции  $\vec{H}$  при помощи (4). Для определения  $J_z$  используем аппроксимированную зависимость кривой намагничивания пермаллоя 50Н [1]

$$J(H) = aH/(H + c) \quad (12)$$

и известную связь

$$\vec{J} = [\mu_r(H) - 1] \vec{H}, \quad (13)$$

где  $a = 1,25 \cdot 10^6$  А/м,  $c = 40$  А/м;

$\mu_r(H)$  – относительная магнитная проницаемость.

После нахождения  $J_z$  рассчитываем  $M_z$ ,  $M_c$  и  $M_{em}$  по формулам (2), (3) и (1).

В табл. 1 представлены результаты расчета  $M_c$ ,  $M_z$  и  $M_{em}$ , а также  $M_z(H_0)$  сердечника в однородном магнитном поле [17] и относительные расхождения  $\xi$  между  $M_z$  и  $M_z(H_0)$  по отношению к  $M_z(H_0)$  при разных  $b$  ( $b/R$ ) и уровнях  $H_0$ . Ток витка  $I_c$  и число витков  $w$  подбирались так, чтобы соблюдалось условие  $H_0 = I_c w / b$ . Радиус сердечника оставался неизменным и равным  $R = 5$  мм. Число цилиндрических элементов  $N_o$  при всех уровнях  $H_0$  было выбрано в соответствии с рекомендованными в работе [17]:  $N_o = 4, 8$  и  $8$  для  $b = 80, 165$  и  $330$  мм. Для иллюстрации и определения длины области однородности внешнего магнитного поля  $b_{h0}$  на рис. 2 показано распределение  $H_{cz}$  (вертикальными пунктирными линиями отмечены положения торцов для разных длин, горизонтальной – уровень  $H_0 = 6586,62$  А/м;  $b_{330} = 330$  мм). Потребуем, чтобы в области однородности  $b_{h0}$  относительное отклонение между  $H_{cz}$  и  $H_0$  не превышало 3%. Тогда для  $b = (80; 165; 330)$  мм область  $b_{h0} = (34,4; 122,6; 288,1)$  мм, а его относительное значение  $b_{h0}/b = (0,43; 0,74; 0,87)$ .

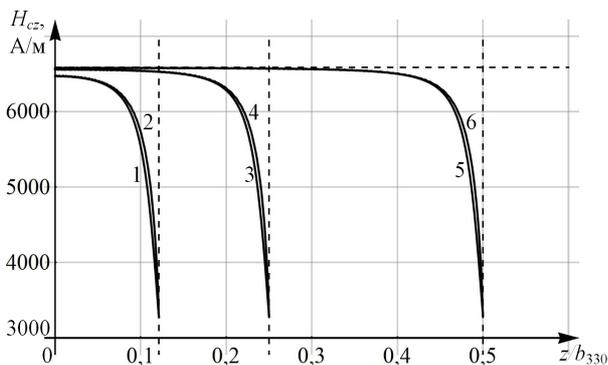


Рис. 2. Распределение осевой проекции напряженности внешнего магнитного поля катушки при  $I_c w / b = 6586,62$  А/м для трех длин:  $b = 80$  мм (кривая 1, 2),  $b = 165$  мм (кривая 3, 4),  $b = 330$  мм (кривая 5, 6); для кривых 1, 3, 5 –  $r = 0$ , для 2, 4, 6 –  $r = 0,99R$

Таблица 1 – Сравнение  $M_z$  цилиндрического сердечника с катушкой и  $M_z(H_0)$  сердечника в однородном магнитном поле  $H_0$

$b$ , мм; $b/R$	$H_0 = I_c w / b$ , А/м	$M_c$ , А·м <sup>2</sup>	$M_z$ , А·м <sup>2</sup>	$M_{em}$ , А·м <sup>2</sup>	$M_z(H_0)$ , А·м <sup>2</sup>	$\xi$ , %
80; 16	1646,66	0,024	0,471	0,495	0,499	5,630
	3293,31	0,048	0,931	0,980	0,986	5,581
	6586,62	0,097	1,823	1,919	1,926	5,369
	9879,93	0,145	2,675	2,819	2,822	5,230
165; 33	1646,66	0,050	3,019	3,069	3,083	2,070
	3293,31	0,100	5,786	5,886	5,904	1,990
	6586,62	0,199	10,593	10,792	10,776	1,697
	9879,93	0,299	12,858	13,156	12,972	0,886
330; 66	1646,66	0,100	17,657	17,756	17,834	0,994
	3293,31	0,199	25,095	25,294	25,288	0,763
	6586,62	0,398	28,106	28,504	28,342	0,834
	9879,93	0,597	29,229	29,827	29,481	0,854

Из табл. 1 следует, что с увеличением относительной длины  $b/R$  и уровня  $H_0$  уменьшаются расхождения  $\xi$ . Первое связано с тем, что при увеличении  $b/R$  относительное значение области  $b_{h0}/b$  растет (см. рис. 2 и выше соответствующие значения  $b_{h0}/b$  для  $b$ ), а второе – что с увеличением  $H_0$  значения  $J_z$  смещаются в область насыщения кривой намагничивания (исключением является  $b = 330$  мм при  $H_0 = (6586,62 \div 9879,93)$  А/м, поскольку преобладающая часть сердечника уже находится в состоянии насыщения).

**Анализ влияния формы меридианного сечения на магнитный момент сердечника и электромагнита.** Вначале рассмотрим сердечник осесимметричной формы, помещенный соосно в однородное постоянное магнитное поле напряженностью  $\vec{H}_0$  (рис. 3). Форма меридианного сечения этого сердечника отличается от цилиндрического наличием шайб (полюсных наконечников) вблизи торцов сердечника. Эти шайбы имеют следующие размеры:  $R_w$  – наружный радиус шайбы;  $h_w$  – его толщина;  $h_c$  – расстояние от торца сердечника к ближайшему основанию шайбы. Известно [1], что  $M_z$  такой формы сердечника заметно превышает  $M_z$  цилиндрического сердечника с теми же  $R$  и  $b$ .

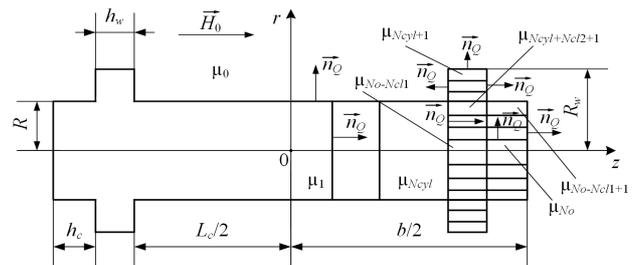


Рис. 3. Меридианное сечение сердечника сложной формы

Учет дополнительного краевого эффекта, обусловленного наличием шайб, осуществим разбиением сердечника как на цилиндрические, так и на кольцевые элементы. Причем участок сердечника длиной  $L_c$  будем разбивать на  $N_{cyl}$  однородных цилиндрических элементов, а остальные участки – на  $N_{cl}$  однородных кольцевых элементов с абсолютной магнитной проницаемостью  $\mu_k$ ,  $k = 1, N_o$  так, что  $N_o = N_{cyl} + N_{cl}$ . Эти остальные участки разбиваем на два цилиндрических элемента шириной  $h_w$  и  $h_c$ , каждый из которых в свою очередь разбиваем на  $N_{cl1}$  кольцевых, а область шайбы – на  $N_{cl2}$  кольцевых элементов (см. рис. 3). Таким образом, общее число кольцевых элементов равно  $N_{cl} = 2N_{cl1} + N_{cl2}$ . Интегральное уравнение (9) для такой геометрии, с учетом однородности внешнего магнитного поля, преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_m(Q) - \frac{\lambda_\mu}{\pi} \int_{l_1+l_2} \sigma_m(M) [S(Q, M) - S(Q, M')] dl_M - \frac{\lambda_\mu}{\pi} \sum_{k=1}^{N_3+N_4} \sigma_m(M_k) \int_{l'_k} [S(Q, M) - S(Q, M')] dl_M = (14) = 2\mu_0 \lambda_\mu H_{0n}(Q),$$

где  $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ ;

$$l_3 = \sum_{k=1}^{N_3} l_k^c, \quad l_3 - \text{суммарный контур границы между}$$

основаниями цилиндрических и кольцевых элементов;

$$l_4 = \sum_{k=N_3+1}^{N_3+N_4} l_k^c, \quad l_4 - \text{суммарный контур границы}$$

между боковыми поверхностями кольцевых элементов;

$l_k^c$  – граница между цилиндрическими и кольцевыми элементами в расчетной области;

$$N_3 = N_{cyl} - 1 + 2N_{cl1}, \quad N_4 = 2(N_{cl1} - 1) + N_{cl2};$$

$H_{0n}(Q) = 0$  для  $Q \in l_1 \cup l_4$  (исключением является участок  $l_1$ , принадлежащий левому и правому основанию шайбы, где для левого основания  $H_{0n}(Q) = -H_0$ , а для правого –  $H_{0n}(Q) = H_0$ ) и  $H_{0n}(Q) = H_0$  для  $Q \in l_2 \cup l_3$ .

При  $Q \in l_1 \cup l_2 \cup l_3$ , за исключением границ между основаниями кольцевых и цилиндрического с кольцевыми элементами, параметр  $\lambda_\mu$  определяется по формуле как для уравнения (9). На границе между основаниями цилиндрического и кольцевых

элементов:  $\lambda_\mu = \frac{\mu_{N_{cyl}} - \mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+k}}{\mu_{N_{cyl}} + \mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+k}}, k = \overline{1, N_{cl1}}$ ; на

границе между основаниями кольцевых элементов:

$$\lambda_\mu = \frac{\mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+k} - \mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+N_{cl1}+k}}{\mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+k} + \mu_{N_{cyl}+N_{cl2}+N_{cl1}+k}}, k = \overline{1, N_{cl1}}$$
; на границе

между боковыми поверхностями кольцевых элементов предпоследнего цилиндрического элемента

$$\text{и шайбы: } \lambda_\mu = \frac{\mu_{N_{cyl}+k+1} - \mu_{N_{cyl}+k}}{\mu_{N_{cyl}+k+1} + \mu_{N_{cyl}+k}}, k = \overline{1, N_{cl2} + N_{cl1} - 1};$$

на границе между боковыми поверхностями кольцевых элементов последнего цилиндрического

$$\text{элемента: } \lambda_\mu = \frac{\mu_{N_o - N_{cl1} + k + 1} - \mu_{N_o - N_{cl1} + k}}{\mu_{N_o - N_{cl1} + k + 1} + \mu_{N_o - N_{cl1} + k}}, k = \overline{1, N_{cl1} - 1}.$$

При  $Q \in l_1 \cup l_4$  (кроме участка  $l_1$ , принадлежащему левому и правому основанию шайбы, в которых  $S(Q, M) = -S_z(Q, M)$  для левого основания и  $S(Q, M) = S_z(Q, M)$  – для правого)  $S(Q, M) = S_r(Q, M)$ , а при  $Q \in l_2 \cup l_3 - S(Q, M) = S_z(Q, M)$ .

Заметим, что для расчета  $M_z$  при такой форме меридианного сечения сердечника в третьем блоке итерационного алгоритма работ [9, 17] необходимо дополнительно определять среднюю по объему каждого кольцевого элемента относительную магнитную проницаемость следующим образом:

$$\mu_{kr}^{-(j)} = \frac{2}{(R_k^2 - R_{k+1}^2)h_w} \int_{S_k} r_M \mu_r(M) dS_M, k = \overline{N_{cyl} + 1, N_o - N_{cl1}};$$

$$\mu_{kr}^{-(j)} = \frac{2}{(R_k^2 - R_{k+1}^2)h_c} \int_{S_k} r_M \mu_r(M) dS_M, k = \overline{N_o - N_{cl1} + 1, N_o},$$

где  $R_k$  – больший радиус  $k$ -го кольцевого элемента;

$S_k$  – площадь меридианного сечения  $k$ -го кольцевого элемента.

В табл. 2 представлены результаты расчета  $M_z$  сердечника сложной формы для разных положений шайб ( $h_c$ ) и их размеров ( $R_w, h_w$ ) и  $M_z$  сердечника цилиндрической формы (в таблице  $h_w, R_w, h_c, \xi$  обозначены “\_”), а также относительные расхождения  $\xi$  между  $M_z$  сердечника сложной и цилиндрической форм по отношению к  $M_z$  сердечника цилиндрической формы. При расчете  $M_z$  было выбрано следующие числа цилиндрических и кольцевых элементов:  $N_{cyl} = 7, N_{cl1} = 10, N_{cl2} = 5$ . Радиус здесь и далее оставался неизменным и равным  $R = 5$  мм. На рис. 4–5 графически проиллюстрировано влияние положения шайб ( $h_c$ ) и наружного радиуса шайб ( $R_w$ ) на распределение  $J_z$  сердечника сложной формы, а для сравнения показано распределение  $J_z$  сердечника цилиндрической формы.

Из табл. 2 видно, что шайбы существенно увеличивают  $M_z$ , причем это влияние более выражено для коротких сердечников ( $b/R = 16$ ). Это объясняется тем, что изначально, в случае коротких сердечников, в силу большого значения размагничивающего поля, намагниченность находится на начальном участке кривой намагничивания и поэтому влияние шайб дает наиболее эффективный вклад в  $M_z$ . Это иллюстрируют расхождения  $\xi$  в табл. 2: для длинных сердечников ( $b/R = 66$ ) при  $H_0 = 1646,66$  А/м они составляют (44–48) % и с увеличением до  $H_0 = 3293,31$  А/м  $\xi$  уменьшается до 16 %, что свидетельствует о насыщении и неэффективном влиянии шайб на  $M_z$ , в то время  $M_z$  коротких сердечников цилиндрической и сложной форм могут отличаться более чем в два раза.

Таблица 2 – Сравнение  $M_z$  сердечника сложной и цилиндрической формы в однородном магнитном поле

$b, \text{ мм}; b/R$	$h_w, \text{ мм}$	$R_w, \text{ мм}$	$h_c, \text{ мм}$	$H_0, \text{ А/м}$	$M_z, \text{ А} \cdot \text{м}^2$	$\xi, \%$
330; 66	–	–	–	1646,66	17,834	–
	4	9	4		26,322	47,6
	4	9	8		25,989	45,7
	4	9	12		25,633	43,7
	–	–	–	3293,31	25,294	–
	4	9	8		29,257	15,7
80; 16	–	–	–	9879,93	2,822	–
	1	9	1		6,314	123,7
	1	9	4		6,068	115,0
	1	9	8		5,226	85,2
	3	9	3		5,864	107,8
	5	9	2		5,903	109,2
	1	7	1		4,825	71,0
	1	11	1		6,553	132,2
	1	7	4		4,808	70,4
	1	11	4		6,657	135,9
	1	7	8		4,538	60,8
	1	11	8		6,032	113,7

Причиной такого сильного влияния шайб на  $M_z$  является то, что их наличие формирует дополнительный краевой эффект. Этот эффект уменьшает размагничивающее поле  $H_{mz}$ , что дает

увеличение  $H_z$ ,  $J_z$  и  $M_z$ . На рис. 4–5 это проиллюстрировано. Например, при перемещении шайб ближе к торцам (рис. 4) усиливается влияние дополнительного краевого эффекта, что дает увеличение  $M_z$ . Для коротких сердечников это более выражено (при фиксированных  $h_w = 1$  мм и  $R_w = 9$  мм и уменьшении  $h_c$  от 8 до 1 мм значение  $\xi$  увеличивается от 85 до 124 %). При увеличении внешнего радиуса шайб (рис. 5) также увеличивается  $M_z$ , вследствие усиления влияния краевого эффекта, обусловленного увеличением площади поверхности шайбы.

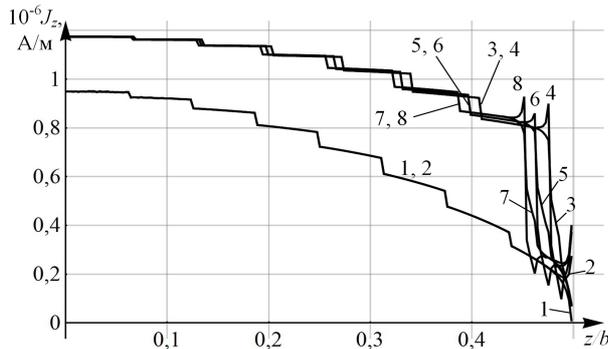


Рис. 4. Распределение осевой проекции намагниченности вдоль оси (кривые 1, 3, 5, 7) и при  $r = 0,99R$  (2, 4, 6, 8) при  $H_0 = 1646,66$  А/м для  $b = 330$  мм: кривые 1, 2 соответствуют сердечнику цилиндрической формы, 3–8 – сложной формы с  $h_w = 4$  мм,  $R_w = 9$  мм и  $h_c = 4$  мм (кривые 3, 4),  $h_c = 8$  мм (5, 6),  $h_c = 12$  мм (7, 8)

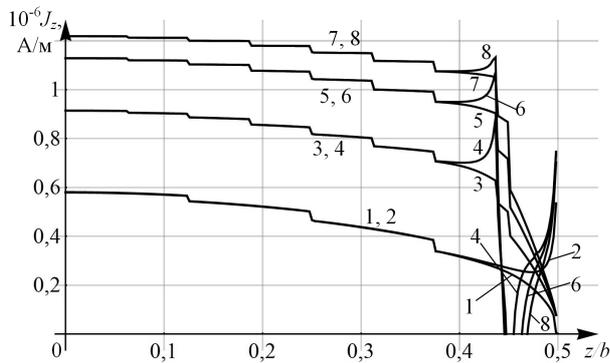


Рис. 5. Распределение осевой проекции намагниченности вдоль оси (кривые 1, 3, 5, 7) и при  $r = 0,99R$  (2, 4, 6, 8) при  $H_0 = 9879,93$  А/м для  $b = 80$  мм: кривые 1, 2 соответствуют сердечнику цилиндрической формы, 3–8 – сложной формы с  $h_w = 1$  мм,  $h_c = 4$  мм и  $R_w = 7$  мм (кривые 3, 4),  $R_w = 9$  мм (5, 6),  $R_w = 11$  мм (7, 8)

Теперь рассмотрим влияние катушки на  $M_z$  сердечника сложной формы. Итерационный алгоритм такой же, как и в случае однородного внешнего магнитного поля за исключением того, что проекции напряженности этого поля определяются по формулам (5), (6), а в правой части уравнения (14) вместо  $H_{0n}(Q)$  необходимо использовать  $H_{cn}(Q)$ . Отметим, что  $H_{cn}(Q)$  будет принимать значения  $H_{cz}(Q)$  вместо  $H_0$  и, соответственно,  $-H_{cz}(Q)$  вместо  $-H_0$ , и  $H_{cr}(Q)$  вместо 0. Числа цилиндрических и кольцевых элементов были выбраны такими же. В табл. 3 представлены результаты расчета  $M_c$ ,  $M_z$  и  $M_{em}$  для сердечников сложной формы при разных  $R_w$  и для

сердечников цилиндрической формы при разных  $L_c$ , а также относительные расхождения  $\xi$  между  $M_z$  сердечников цилиндрической и сложной форм без катушки и с катушкой по отношению к  $M_z$  без катушки (знак “-” в ячейках таблицы свидетельствует об отсутствии шайб, либо об отсутствии катушки, либо об отсутствии и того и другого). Наблюдаем, как и в случае с однородным магнитным полем, существенное увеличение  $M_z$  и  $M_{em}$  при появлении шайб, иногда достигающее более чем в два раза. Влияние катушки на  $M_z$  сердечника сложной и цилиндрической форм незначительное и составляет (3–4) %. Влияние уменьшения длины катушки на  $M_z$  цилиндрического сердечника и того меньше и составляет 1,6 %.

Таблица 3 – Сравнение  $M_z$  сердечника сложной и цилиндрической форм с катушкой и без нее при  $H_0 = I_c w / L_c = 1646,66$  А/м

$b$ , мм; $b/R$	$h_w$ , мм	$R_w$ , мм	$h_c$ , мм	$L_c$ , мм	$M_c$ , А·м <sup>2</sup>	$M_z$ , А·м <sup>2</sup>	$M_{em}$ , А·м <sup>2</sup>	$\xi$ , %
165; 33	–	–	–	–	–	3,083	–	–
	–	–	–	165	0,050	3,019	3,069	2,07
	–	–	–	157	0,047	2,970	3,017	3,66
	2	7	2	–	–	5,494	–	–
	2	7	2	157	0,047	5,294	5,342	3,64
	2	9	2	–	–	6,176	–	–
	2	9	2	157	0,047	5,976	6,024	3,23
	2	11	2	–	–	7,013	–	–
2	11	2	157	0,047	6,801	6,848	3,02	

**Выводы.**

1. Допущение однородности внешнего магнитного поля катушки, при помощи которого возможно применение коэффициентов размагничивания для расчета магнитного момента цилиндрического сердечника  $M_z$ , справедливо для  $b/R \geq 33$  при условии, что это поле обеспечивает насыщение преобладающей части сердечника. Для  $b/R = 33$  достаточно  $H_0 (I_c w / b) \geq 9879,93$  А/м, а для  $b/R = 66$  достаточно  $H_0 (I_c w / b) \geq 1646,66$  А/м, при этом относительные расхождения между соответствующими  $M_z$  не превышают 1 %.

2. С увеличением внешнего радиуса шайб сердечника сложной формы и уменьшением их расстояния до торцов растет  $M_z$  и  $M_{em}$ , причем это более выражено для коротких сердечников ( $R = 5$  мм,  $b/R = 16$ ,  $\xi = (70 \div 136)$  %) даже при большем уровне  $H_0 = 9879,93$  А/м, чем для длинных ( $R = 5$  мм,  $b/R = 66$ ,  $\xi = (44 \div 48)$  %) при меньшем  $H_0 = 1646,66$  А/м.

3. Уровень влияния катушки для сердечников сложной формы примерно такой же как и для цилиндрических сердечников и составляет (3–4) % при  $R = 5$  мм,  $b/R = 33$ ,  $R_w = (7–11)$  мм,  $h_w = h_c = 2$  мм,  $L_c = 157$  мм,  $H_0 (I_c w / L_c) = 1646,66$  А/м.

**Список литературы**

1. Коваленко А. П. *Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами.* М.: Машиностроение, 1975. 248 с.

2. Розенблат М. А. Коэффициенты размагничивания стержней высокой проницаемости. *Журнал технической физики*. 1954. Т. 24, № 4. С. 637–661.
3. Матюк В. Ф., Осипов А. А., Стрелюхин А. В. Распределение намагниченности вдоль цилиндрического стержня круглого сечения, находящегося в продольном постоянном однородном магнитном поле. *Электротехника*. 2009. № 8. С. 37–46.
4. Yamamoto Y., Yamada H. New analytical expressions for flux distribution and demagnetizing factor of cylindrical core. *Electrical Engineering in Japan*. 1982. Vol. 102, no. 3. pp. 1–8. doi: 10.1002/ecja.4391020302.
5. Kobayashi M., Ishikawa Y. Surface magnetic charge distributions and demagnetizing factors of circular cylinders. *IEEE transactions on magnetics*. 1992. Vol. 28, no. 3. pp. 1810–1814. doi: 10.1109/20.141290.
6. Chen D. X., Pardo E., Sanchez A. Fluxmetric and magnetometric demagnetizing factors for cylinders. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2006. Vol. 306. pp. 135–146. doi: 10.1016/j.jmmm.2006.02.235.
7. Chadebec O., Rouve L.–L., Coulomb J.–L. New methods for a fast and easy computation of stray fields created by wound rods. *IEEE Transaction on Magnetics*. 2002. Vol. 38, no. 2. pp. 517–520. doi: 10.1109/20.996136.
8. Матюк В. Ф., Осипов А. А., Стрелюхин А. В. Моделирование магнитного состояния ферромагнитного стержня в продольном постоянном магнитном поле. *Техническая диагностика и неразрушающий контроль*. 2011. № 1. С. 20–27.
9. Чуніхін К. В. Про неоднорідність намагнічування циліндричних осердь в однорідному магнітному полі. *Технічна електродинаміка*. 2019. № 1. С. 3–6. doi: 10.15407/techned2019.01.003.
10. Гринберг Г. А. *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*. М. – Л.: Изд. АН СССР, 1948. 730 с.
11. Тозони О. В., Маергойз И. Д. *Расчет трехмерных электромагнитных полей*. К.: «Техника», 1974. 352 с.
12. Смайт В. *Электростатика и электродинамика*. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 604 с.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции*. М.: Наука, 1977. 344 с.
14. Михайлов В. М., Чунихин К. В. Об электростатической аналогии магнитостатического поля в неоднородной намагничивающейся среде. *Электротехника и электромеханика*. 2017. № 5. С. 38–40. doi: 10.20998/2074–272X.2017.5.05.
15. Jungerman J. A. Fourth-order uniform electric field form two charged rings. *Review of Scientific Instruments*. 1984. Vol. 55, no. 9. pp. 1479–1482. doi: 10.1063/1.1137962.
16. Михайлов В. М. *Расчет электрических и магнитных полей с помощью интегральных и интегродифференциальных уравнений*. К.: УМК ВО, 1988. 60 с.
17. Чунихин К. В. О влиянии уровня внешнего магнитного поля и длины на магнитный момент цилиндрических сердечников. *Электротехника и электромеханика*. 2018. № 6. С. 33–37. doi: 10.20998/2074–272X.2018.6.06.
3. Matyuk V. F., Osipov A. A., Strelyukhin A. V. Raspreделение namagnichennosti vdol' tsilindricheskogo sterzhnya kruglogo secheniya, nakhodyashchegosya v prodol'nom postoyannom odnorodnom magnitnom pole [Magnetization distribution along the cylindrical rod in longitudinal constant uniform magnetic field]. *Elektrotehnika*. 2009, no. 8, pp. 37–46.
4. Yamamoto Y., Yamada H. New analytical expressions for flux distribution and demagnetizing factor of cylindrical core. *Electrical Engineering in Japan*. 1982, vol. 102, no. 3, pp. 1–8. doi: 10.1002/ecja.4391020302
5. Kobayashi M., Ishikawa Y. Surface magnetic charge distributions and demagnetizing factors of circular cylinders. *IEEE transactions on magnetics*. 1992, vol. 28, no. 3, pp. 1810–1814. doi: 10.1109/20.141290.
6. Chen D. X., Pardo E., Sanchez A. Fluxmetric and magnetometric demagnetizing factors for cylinders. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2006, vol. 306, pp. 135–146. doi: 10.1016/j.jmmm.2006.02.235.
7. Chadebec O., Rouve L.–L., Coulomb J.–L. New methods for a fast and easy computation of stray fields created by wound rods. *IEEE Transaction on Magnetics*. 2002, vol. 38, no. 2, pp. 517–520. doi: 10.1109/20.996136.
8. Matyuk V. F., Osipov A. A., Strelyukhin A. V. Modelirovanie magnitnogo sostoyaniya ferromagnitnogo sterzhnya v prodol'nom postoyannom magnitnom pole [Modeling of the magnetic state of a ferromagnetic rod in longitudinal constant magnetic field]. *Tekhnicheskaya diagnostika i nerazrushayushchii kontrol'*. 2011, no. 1, pp. 20–27.
9. Chunikhin K. V. Pro neodnorodnist' namagnichuvannya tsylindrychnykh oserd' v odnorodnomu mahnitnomu poli [On the inhomogeneity of the magnetization of cylindrical cores in the uniform magnetic field]. *Tekhnichna elektrodynamika*. 2019, no. 1, pp. 3–6. doi: 10.15407/techned2019.01.003.
10. Grinberg G. A. *Izbrannyye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* [Selected questions of mathematical theory of electric and magnetic phenomena]. Moscow-Leningrad, Acad. of Sci. USSR Publ., 1948. 730 p.
11. Tozoni O. V., Maergoiz I. D. *Raschet trekhmernykh elektromagnitnykh polei* [Calculation of three-dimensional electromagnet fields]. Kiev, Tekhnika Publ., 1974. 352 p.
12. Smythe W. *Elektrostatika i elektrodynamika* [Static and dynamic electricity]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1954. 604 p.
13. Ianke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
14. Mikhailov V. M., Chunikhin K. V. Ob elektrostatocheskoy analogii magnitostatocheskogo polya v neodnorodnoy namagnichivayushchey sredy [On electrostatic analogy of magnetostatic field in inhomogeneous magnetized medium]. *Elektrotehnika i elektromekhanika*. 2017, no. 5, pp. 38–40. doi: 10.20998/2074–272X.2017.5.05.
15. Jungerman J. A. Fourth-order uniform electric field form two charged rings. *Review of Scientific Instruments*. 1984, vol. 55, no. 9, pp. 1479–1482. doi: 10.1063/1.1137962.
16. Mikhailov V. M. Raschet elektricheskikh i magnitnykh polei s pomoshch'yu integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravnenii [Calculation of electric and magnetic fields using integral and integrodifferential equations]. Kiev, UMC VO Publ., 1988. 60 p.
17. Chunikhin K. V. O vliyaniy urovnya vneshnego magnitnogo polya i dliny na magnitnyy moment tsilindricheskikh serdechnikov [On the influence of the level of an external magnetic field and the length on the magnetic moment of cylindrical cores]. *Elektrotehnika i elektromekhanika*. 2018, no. 6, pp. 33–37. doi: 10.20998/2074–272X.2018.6.06.

#### References (transliterated)

1. Kovalenko A. P. *Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nyimi apparatami* [Magnetic control systems for space vehicles]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 248 p.
2. Rozenblat M. A. Koeffitsienty razmagnichivaniya sterzhney vysokoy pronitsaemosti [Demagnetization factors for high permeability rods]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 1954, vol. 24, no. 4, pp. 637–661.

Поступила (received) 28.03.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Чуніхін Костянтин Вадимович (Чунихин Константин Вадимович, Chunikhin Kostiantyn Vadymovych)**

– Державна установа «Інститут технічних проблем магнетизму Національної Академії Наук України», молодший науковий співробітник; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9822-58704>; e-mail: kvchunikhin@gmail.com.