

**Б.Т. КОНОНОВ**, д-р техн. наук, проф., ХУПС, Харків  
**А.О. МУШАРОВ**, ад'юнкт, ХУПС, Харків

**ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В  
ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПРИ ФЕРОРЕЗОНАНСІ**

У статті розглядається графо-аналітичний метод визначення умов стійкості перехідних процесів при ферорезонансі в консервативних та дисипативних системах, заснований на використанні диференціального рівняння Мат'є і аналізі значень коефіцієнтів цього рівняння.

**Ключові слова:** графо-аналітичний метод, перехідні процеси, ферорезонанс, диференціальне рівняння.

**Вступ.** В електричних колах, що містять активний опір, ємність та котушку з феромагнітним осердям, струм в якій  $i_K$  залежить від поточкозчеплення  $\psi$  і визначається за допомогою скороченого поліному третього ступеня, а саме

$$i_K = a_1\psi + a_2\psi^3, \quad (1)$$

де  $a_1$  та  $a_2$  – відповідні коефіцієнти, перехідні процеси мають коливальний характер, в яких значення напруг та струмів можуть приймати неприпустимі величини. Особливо небезпечні явища ферорезонансу напруг та ферорезонансу струмів у випадках, коли не вдається забезпечити стійкість перехідних процесів.

Явище ферорезонансу розглянуто в [1-6]. В [1] ферорезонанс розглядається без урахування впливу вищих гармонійних складових напруг та струмів. Вплив вищих гармонійних складових врахований в [2-4], де для опису явища ферорезонансу отримані неоднорідні диференціальні рівняння, які мають наступний вигляд:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_1\psi + A_2\psi^3 = \varphi_1(U, I), \quad (2)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + A_0 \frac{d\psi}{dt} + A_1\psi + A_2\psi^3 = \varphi_2(U, I), \quad (3)$$

де  $\varphi_1(U, I)$ ,  $\varphi_2(U, I)$  мають вигляд гармонійних функцій. Рівняння (2) описує явище ферорезонансу в консервативній системі, а рівняння (3) описує явище ферорезонансу в дисипативній системі. В [2-4] знайдені

аналітичні рішення для вимушеної складової, які мають вигляд гармонійних функцій виду

$$\psi = A \cos(\omega t + \theta), \quad (4)$$

де  $\omega$  – кутова частота напруги, яка прикладена до кола, що розглядається;  $A$  – амплітуда потокозчеплення, для визначення значення якої наводяться відповідні кубічні рівняння;  $\theta$  – фазовий зсув між вхідною та вихідною змінними, співвідношення для визначення якої також невідомо.

В [5] пропонується для з'ясування характеру перехідного процесу розглядати властивості особливих точок, але цей метод доцільно використовувати лише для найпростіших випадків. В [6] пропонується при проведенні аналізу феромагнітних явищ використовувати аналітичні співвідношення, які отримані для вільних складових рішень диференціальних рівнянь (2) та (3). Але використання цих співвідношень разом зі співвідношеннями для вимушених складових рішень, по-перше, ускладнює аналіз, а, по-друге, використання методу суперпозиції для нелінійних систем не зовсім коректно та може бути прийнятим в суттєво обмежених випадках.

Відповідно до методу, що пропонується, доцільно від нелінійних диференціальних рівнянь, що описують ферорезонансні явища, перейти до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які є функціями незалежної змінної, а саме періодичними функціями часу. Для цього будемо вважати, що розглянутим системам, які описуються рівняннями (2) та (3), притаманні малі відхилення  $\psi_x$  від найближчого рішення  $\psi_3$  має вигляд

$$\psi_3 = \psi + \psi_x. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (2) та враховуючи лише лінійні складові відносно  $\psi_x$ , а також тотожність лівої і правої частини (2) відносно рішення (4), отримуємо, що

$$\frac{d^2 \psi_x}{dt^2} + A_1 \psi_x + 3A_2 \psi^3 \phi_x = 0. \quad (6)$$

Використовуючи (4) й виходячи з того, що у випадку консервативної системи  $\theta = 0$ , отримуємо

$$\frac{d^2 \psi_x}{dt^2} + A_1 \psi_x + 3A_2 (A \cos \omega t)^2 \phi_x = 0. \quad (7)$$

З огляду на те, що  $\cos^2 \omega t$  можна представити через  $\cos 2\omega t$ , маємо

$$\frac{d^2 \psi_x}{dt^2} + \left( A_1 + \frac{3A^2 A_2}{2} + \frac{3A^2 A_2}{2} \cos 2\omega t \right) \psi_x = 0. \quad (8)$$

Використовуючи підстановки  $\psi_x = y$ , а  $\omega t = z$ , отримуємо стандартну форму запису рівняння Мат'є

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)y = 0, \quad (9)$$

$$\text{де } a = \frac{A_1 + 3A^2 A_2 / 2}{\omega^2}; \quad q = \frac{3A^2 A_2}{4\omega^2}.$$

В [2] отримане кубічне рівняння для визначення амплітудного значення величини  $A$ , яке має для прийнятих в дійсній статті позначень наступний вигляд

$$-\omega^2 A + A_1 A + \frac{3}{4} A_2 A^3 = B. \quad (10)$$

Враховуючи (10), зв'язок між  $\omega^2$  та величинами  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  та  $B$ , отримуємо наступні співвідношення для  $a$  та  $q$ .

$$a = \frac{A_1 + \frac{3}{2} A_2 A^2}{A_1 + \frac{3}{4} A_2 A^2 - \frac{B}{A}}; \quad (11)$$

$$q = \frac{-\frac{3}{4} A_2 A^2}{A_1 + \frac{3}{4} A_2 A^2 - \frac{B}{A}}.$$

Отримана стандартна форма рівняння Мат'є (9) є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, в якому період зміни коефіцієнту по змінній  $z$  дорівнює  $\pi$ . У випадку, коли  $A_2=0$ , значення  $q$  також дорівнює нулю і при  $a>0$  рішення рівняння (9) відповідає звичайним гармонійним коливанням. Якщо  $A_2 \neq 0$ , то  $q \neq 0$ , але  $|z_q| < A$ , множник при змінній  $y$  в рівнянні (9) є пульсуючим, залишаючись завжди таким, що є більшим нуля. В цьому випадку рішення рівняння (9), у певному сенсі, мають вигляд гармонійних функцій. На рис.1 наведена площина параметрів  $q$  та  $a$ , що розміщуються між кутом, який обмежений прямими  $z_q+a > 0$  та  $-z_q+a > 0$ , дають підставу вважати, що рішення рівняння (9) повинно бути стійким. У випадку, коли  $q>0$ ,  $a<0$  рішення (9) представляється гіперболічними функціями синуса та ко-

синуса, які необмежено зростають і є нестійкими. У випадку, коли  $|z_q| > 0$ , множник при змінній  $y < 0$  і рішення (9) будуть нестійкими.

У випадку, коли  $|q| \ll 1$ , можливо більш точно визначити значення  $q$  та  $a$ , які забезпечують стійкість рішення рівняння (9). Для цього доцільно використати метод збурень, відповідно до якого для визначення зон стійкості, рішення рівняння (9) будемо шукати у вигляді наступних рядів:

$$\begin{aligned} y(2) &= y_0(z) + qy_1(z) + q^2y_2(z) + \dots \\ a(q) &= a_0 + qa_1 + q^2a_2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

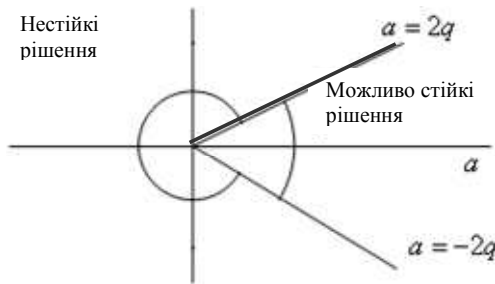


Рис. 1 – Графік для визначення стійкості рішень рівняння Мат'є.

Після підстановки (12) в (9) та угруповання складових при рівних ступенях  $q$  отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_0}{dz^2} + a_0y_0 &= 0; \\ \frac{d^2y_1}{dz^2} + a_1y_1 &= -a_1y_0 + 2y_0 \cos 2z; \\ \frac{d^2y_2}{dz^2} + a_0y_2 &= -a_2y_0 - a_1y_1 + 2y_1 \cos 2z. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничні співвідношення значень  $q$  та  $a$  можливо знайти, розглядаючи залежності між  $a$  та  $q$ , які мають періодичні рішення з періодом  $\pi$  та  $2\pi$ .

Нульове рішення отримаємо, використовуючи перше рівняння (13). Воно має вигляд

$$y_0 = C_0 \cos \sqrt{a_0} z + D_0 \sin \sqrt{a_0} z. \quad (14)$$

З (14) слідує, що для отримання періодичного рішення з періодом  $2\pi$  слід прийняти  $a_0=1$ . Це дає змогу друге рівняння системи (13) представити таким чином

$$\frac{d^2 y_1}{dz^2} + y_1 = -(a_1 - 1)C_0 \cos z - (a_1 + 1)D_0 \sin z + C_0 \cos 3z + D_0 \sin 3z. \quad (15)$$

Гармонічне рішення рівняння (15) повинно мати дві частини, одна з яких є нестійкою, а інша є періодичною функцією. З рівняння (15) слідує, що його рішення буде мати складові, що містять гармонічні функції зі змінними  $z$  та  $3z$ . Якщо прийняти  $a_1=1$ , то рішення рівняння (15) має вигляд

$$y_1 = C_1 \cos z + D_1 \sin z + D_0 z \cos z + \frac{1}{8}(C_0 \cos 3z + D_0 \sin 3z) \quad (16)$$

Перша, друга, четверта та п'ята складові співвідношення (16) є періодичними функціями, а третя складова цього співвідношення необмежено зростає і є нестійкою складовою. Це означає, що для  $a_0=1$  відповідна границя зони стійкості відповідає умові, згідно з якою  $a = a_0 + qa_1 = 1 + q$ . Якщо вибрати  $a_1 = -1$ , то  $y_1$  має вигляд співвідношення (16) за виключенням того, що в цьому випадку третя складова дорівнює  $C_0 z \sin z$ . В цьому випадку границя зони стійкості відповідає рівнянню  $a=1-q$ . Для визначення границі зони стійкості у випадку, коли одна частина рішень є зростаючою функцією, а інша є періодичною функцією з періодом, який дорівнює  $\pi$ , слід прийняти в (14), що  $a_0=u$ . При цьому рішення першого рівняння (13) має вигляд

$$y_0 = C_0 \cos 2z + D_0 \sin 2z. \quad (17)$$

Відповідно, друге рівняння системи (13)

$$\frac{d^2 y_1}{dz^2} + 4y_1 = -a_1(C_0 \cos 2z + B_0 \sin 2z) + C_0 + C_0 \cos 4z + D_0 \sin 4z. \quad (18)$$

Якщо взяти  $a_1=0$ , то рішення (18) має вигляд

$$y_1 = C_1 \cos 2z + D_1 \sin 2z + \frac{C_0}{4} - \frac{1}{12}(C \cos 4z + B \sin 4z) \quad (19)$$

З врахуванням (18) та (19) третє рівняння системи (13) приймає вид

$$\frac{d^2 y_2}{dz^2} + 4y_2 = (-a_2 + \frac{5}{12})C_0 \cos 2z - (a_2 + \frac{1}{12})D_0 \sin 2z + C_1 + C_1 \cos 4z + D_1 \sin 4z - \frac{C_0}{12} \cos 6z - \frac{B_0}{12} \sin 6z. \quad (20)$$

Якщо вибрати  $a_2 = -5/12$ , то в рівнянні (20) зникає перша складова правої частини і відповідна границя зони стійкості описується рівнянням

$$a = a_0 + qa_1 + q^2 a_2 = 4 + \frac{5}{12} q^2 \quad (21)$$

Якщо вибрати  $a_2 = -1/12$ , то в рівнянні (20) зникає друга складова правої частини і відповідна границя зони стійкості описується рівнянням

$$a = 4 - \frac{1}{12} q^2. \quad (22)$$

Для визначення границі зони стійкості при  $a_0=0$  в рішенні першого рівняння системи (13), яке має вигляд  $y_0 = C_0 + D_0 z$ , прийемо, що  $D_0=0$ . При цьому друге рівняння системи (13)

$$\frac{d^2 y_1}{dz^2} = -a_1 C_0 + 2C_0 \cos 2z. \quad (23)$$

Для виключення зростаючої складової в (23) потрібно вибрати, що  $a_1=0$ . Рішення (23) є гармонійна функція змінної  $z$  з періодом, що дорівнює  $\pi$

$$y_1 = -\frac{C_0}{2} \cos 2z. \quad (24)$$

Відповідно, останнє рівняння системи (13)

$$\frac{d^2 y_2}{dz^2} = -(a_2 + \frac{1}{2})C_0 - \frac{C_0}{2} \cos 4z. \quad (25)$$

Зростаюча складова в рішенні рівняння (25) буде відсутня, якщо  $a_2 = -1/2$ , а відповідна границя зони стійкості має вигляд  $a = -\frac{1}{2} q^2$ . Знайдені зони стійкості в площині  $q, a$ , побудовані на рис. 2.

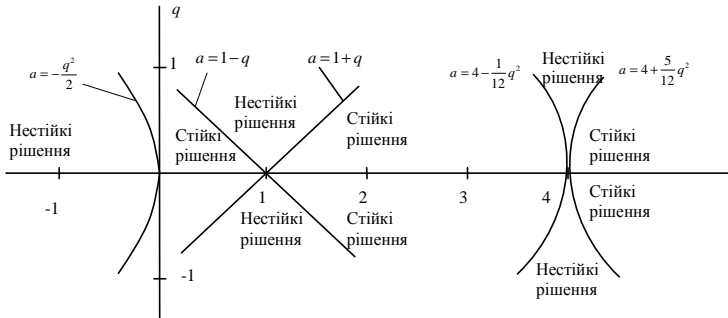


Рис. 2 – Границі зон стійкості.

Порівняння границь зон стійкості на рис. 1 та рис. 2, дає підстави стверджувати, що рівняння Мат'є практично всюди стійке, якщо  $a > 0$  та  $2q < a$ . Звичайно, що для більш точного визначення зон стійкості слід користуватися границями, що наведені на рис. 2.

У випадку ферорезонансу, який має місце в дисипативних системах, що описуються рівнянням (3) для переходу до рівняння Мат'є потрібно виключити складову, що має першу похідну. Для цього від змінної  $\psi$  потрібно перейти до змінної  $x$ , використовуючи для цього наступне перетворення

$$x = \psi e^{A_0 \frac{t}{2}} \text{ або } \psi = x e^{-A_0 \frac{t}{2}}. \quad (26)$$

Після використання перетворення (26) рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{A_0^2}{4} + A_1\right)x + A_2 e^{-A_0 t} x^3 = y_2(U, I) e^{\frac{A_0}{2} t}. \quad (27)$$

Для визначення стійкості рішень рівняння (27) пропонується використовувати чисельні методи, або знаходити рішення на певних інтервалах зміни часу, обчислюючи середнє значення коефіцієнта  $A_2 e^{-A_0 t}$  на цьому інтервалі часу, тобто вважаючи цей коефіцієнт на розглядаємому інтервалі часу постійним. В подальшому, використовуючи наведений вище метод аналізу стійкості за допомогою переходу до рівняння Мат'є, можливо визначитися з границями стійкості в площині  $a$  та  $q$ .

### Висновки:

1. Для визначення стійкості перехідних процесів при ферорезонансі в консервативних системах доцільно використовувати графо-

аналітичний метод, заснований на використанні диференціального рівняння Мат'є і аналізі значень коефіцієнтів цього рівняння.

2. Для визначення стійкості перехідних процесів при ферорезонансі в дисипативних системах необхідно, по-перше, виключити з диференціального рівняння, що описує явище ферорезонансу, складову, яка містить першу похідну розглядаємої змінної, а по-друге, знаходити рішення отриманого диференціального рівняння, на певних інтервалах часу, приймаючи при цьому, що коефіцієнт при нелінійній складовій є постійним на розглядаємому інтервалі часу.

**Список літератури:** 1. Атабеков Г.И., Купелян С.Д., Тимофеев А.Б., Хухриков С.С. Теоретические основы электротехники. Под редакцией Г.И. Атабекова, ч. 2 и 3. Нелинейные цепи. Электромагнитное поле. М. – Л., Энергия, 1966 – 280 с. 2. Кононов Б.Т., Кононова Е.А., Мушаров А.А. Феррорезонанс в электрических сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения. Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 1 (30). – С. 144-146. 3. Кононов Б.Т., Мушаров А.А. Феррорезонанс в электрических цепях с различными схемами соединения активного сопротивления, емкости и катушки с ферромагнитным сердечником. // Збірник наукових праць ХУПС. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 2 (31). – С. 110-114. 4. Кононов Б.Т., Мушаров А.О. Феррорезонанс напруг в дисипативній системі. // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 4 (32). – С. 118-120. 5. Кононов Б.Т., Мушаров А.О. Дослідження стійкості феррорезонансних систем. // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 2 (11). – С. 208-209. 6. Кононов Б.Т., Мушаров А.О. Аналітичні співвідношення для аналізу феррорезонансних явищ в електричних системах. // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУПС, 2013. – Вип. 1 (33). – С. 83-86.

*Надійшла до редколегії 24.09.2013*

#### **УДК 621.301**

**Дослідження стійкості перехідних процесів в електричних колах при ферорезонансі / Кононов Б.Т., Мушаров А.О. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2013. – № 51 (1024). – С. 82-90. Бібліогр.: 6 назв.**

В статье рассматривается графоаналитический метод определения условий устойчивости переходных процессов при феррорезонансе в консервативных и диссипативных системах, основанный на использовании уравнения Мат'е и анализе значений коэффициентов этого уравнения.

**Ключевые слова:** графоаналитический метод, переходные процессы, феррорезонанс, дифференциальные равенства.

The paper deals with graphical-analytical method for determining the conditions of stability of transitional regimes for ferroresonance in conservative and dissi-



pative systems based on the use of the Mathieu equation and analyzing the values of the coefficients of this equation.

**Keywords:** graph-analytical method, transients, ferroresonance, the differential equation.