

Є.І. БАЙДА

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРІВ, ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

Вступ. Одною з цікавих задач, яка може бути вирішена методом Монте-Карло є задача так званого «детермінованого хаосу». Під цим терміном в подальшому будемо мати на увазі нерегулярність, хаотичний рух динамічних систем, закони яких однозначно визначають еволюцію по відомій передісторії. Одним з таких характерних явищ є, наприклад, турбулентність, яка залежить від числа Рейнольдса. Окрім цього, цікавий і сам метод, за допомогою якого отримані такі структури – метод Монте-Карло. Тому автор вважає, що таке невеличке дослідження представляє певний інтерес, сприяє розширенню кругозору та заохочує читачів до більш детального розгляду проблеми. **Мета.** Мета статті – показати як за допомогою методу Монте-Карло можливе дослідження переходів від структурованої системи до хаотичної та навпаки в залежності від її параметрів. **Методи.** Методи, що використовувались даній статті: чисельні методи розв'язання системи нелінійних рівнянь – метод кінцевих різниць Рунге-Кутти четвертого порядку; статистичні методи – метод Монте-Карло; чисельний метод розв'язання рівнянь теплопередачі та течії рідини – метод кінцевих елементів. **Результати.** Отримані картини розрахункових структур, в які при певних параметрах здійснюється перехід від хаотичної до структурованої системи. **Висновки.** В нелінійних системах результати розрахунку суттєво залежать від параметрів системи та початкових умов, невелика зміна яких може привести до суттєвих та несподіваних змін в остаточному результаті. Окрім цього, при певних значеннях параметру у отриманих фракталах з'являються області, в які точки, що отримані випадковим чином ніколи потрапити не в змозі, що само по собі є дивним результатом.

Ключові слова: метод Монте-Карло, хаос.

E.I. BAIDA

STUDY OF PARAMETER-DEPENDENT SYSTEMS USING THE MONTE CARLO METHOD

Introduction. One of the intriguing problems that can be solved using the Monte Carlo method is the problem of so-called "deterministic chaos." By this term, we refer to the irregularity and chaotic motion of dynamic systems whose laws unambiguously determine their evolution based on known historical data. A characteristic example of such a phenomenon is turbulence, which depends on the Reynolds number. Additionally, the Monte Carlo method itself is of interest, as it allows for the exploration of such structures. Therefore, the author believes that this study is of certain interest, broadens the reader's perspective, and encourages a deeper investigation of the problem. **Purpose.** The objective of this study is to demonstrate how the Monte Carlo method can be used to investigate transitions between structured and chaotic systems depending on their parameters. **Methods.** This study employs the following methods: numerical methods for solving systems of nonlinear equations – the finite difference method and the fourth-order Runge-Kutta method; statistical methods – the Monte Carlo method; numerical methods for solving heat transfer and fluid flow equations – the finite element method. **Results.** The obtained results illustrate computational structures in which, under certain parameters, a transition occurs between chaotic and structured systems. **Conclusions.** In nonlinear systems, the calculation results strongly depend on system parameters and initial conditions, with even slight changes potentially leading to significant and unexpected variations in the final outcome. Furthermore, for certain parameter values, the generated fractals exhibit regions that randomly generated points can never reach, which is itself an intriguing result.

Keywords: Monte Carlo method, chaos.

Вступ. Дана стаття не є строго науковою (скоріше науково-популярною), так як автор не є спеціалістом в цій галузі. Просто переглядаючи деякі сайти автор натрапив на такий собі трикутник Серпінського, фрактали та інші цікаві речі [13]. Так як такі структури залежать від параметрів, то виникає питання як змінюються такі структури в залежності від значення параметра? При яких значеннях параметра здійснюється перехід від хаотичної до детермінованої структури? На ці запитання автор і спробував дати відповідь у даній статті. Окрім цього, цікавий і сам метод, за допомогою якого отримані такі структури – метод Монте-Карло. Тому автор вважає, що таке невеличке дослідження представляє певний інтерес, сприяє розширенню кругозору та заохочує читачів до більш детального розгляду проблеми.

Методи Монте-Карло (методи статистичних випробувань), широко використовуються для вирішення багатьох задач результати яких залежать від випадкових параметрів. Засновниками методу вважаються математики Дж. Нейман та С. Улам [1]. Метод базується на генерації випадкових величин з заданим розподілом (рівномірним, нормальним та ін.) і набув поширення тільки після появи електронних обчислювальних машин, які дозволяють генерувати незалежні випадкові величини в достатньо великих об'єктах.

Метод Монте-Карло характеризується дуже простою структурою обчислювального алгоритму яка мало змінюється при вирішенні задач різного роду.

Точність обчислення цим методом невелика (в порівнянні з іншими методами), але там де є випадкові величини, а результат з точністю (2-5) % задовольняє, метод з успіхом може застосовуватися [2, 6].

Загальна структура використання методу Монте-Карло доволі проста:

- розробляється програма для генерації однієї випадкової події розподіл якої може бути: рівномірний; підпорядковується нормальному закону; розподіл, який підпорядковується закону Пуассона та ін., причому, бажано використовувати стандартні програми генерації випадкової величини, які є доступними в багатьох системах програмування;

- далі генерації випадкової події повторюється N разів, причому кожна окрема подія незалежна від інших подій (остаточна кількість подій N встановлюється на підставі розрахованої в подальшому похибки);

- результати випробувань об'єднуються та усереднюються.

Задачі, які вирішуються методом Монте-Карло дуже різноманітні бо в світі багато процесів на які впливають випадкові величини, а саме:

© Є.І. Байда, 2025

задачі масового обслуговування, коли потік інформації, розподілений з заданою щільністю ймовірності, поступає на канали її обробки;

задачі по розрахунку якості та надійності виробів; розрахунки найбільш ймовірної похибки вимірювання;

ядерна фізика;

обчислення складних інтегралів, тощо [2, 3, 6, 7];

моделювання спільного розподілу кількох величин, що корелюють, з довільним законом розподілу [8-11].

Одною з цікавих задач, яка може бути вирішена методом Монте-Карло є задача так званого «детермінованого хаосу». Під цим терміном в подальшому будемо мати на увазі нерегулярність, хаотичний рух динамічних систем, закони яких однозначно визначають еволюцію по відомій передісторії [12]. Одним з таких характерних явищ є, наприклад, турбулентність, яка залежить від числа Рейнольдса.

Постановка проблеми. Ще на початку 20 сторіччя математик А. Пуанкаре довів, що в деяких механічних системах може з'являтися хаотичний рух. А ще через 70 років метеоролог Е. Лоренц виявив, що проста система із трьох нелінійних рівнянь може привести до хаотичного руху (був сформульований так званий «ефект метелика»). Він полягає у тому, що висока чутливість до початкових умов та параметрів системи приводить до хаотичної поведінки і що це не виключення, а типова властивість багатьох систем.

Така поведінка характерна для електронних ланцюгів з нелінійними елементами, при виникненні турбулентних потоків та ін. З точки зору математики у всіх нелінійних системах з кількістю ступенів свободи більше трьох можлива наявність хаосу. Тобто на достатньо великих термінах часу їх поведінку неможливо передбачити. Проілюструємо це на рівняннях Лоренца

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \sigma \cdot (y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) \cdot (r - z(t)) - y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t) \cdot y(t) - b \cdot z(t),\end{aligned}\quad (1)$$

де σ , r , b – параметри.

Розв'язання системи (1) при наступному значенні параметрів $\sigma=10$; $r=8$; $b=8/3$ показано на рис. 1.

Як можна побачити з рис. 1, хаотичний рух відсутній і система прагне до стійкого стану, але при зміні параметрів на наступні $\sigma=10$; $r=28$; $b=8/3$, поведінка системи змінюється докорінно.

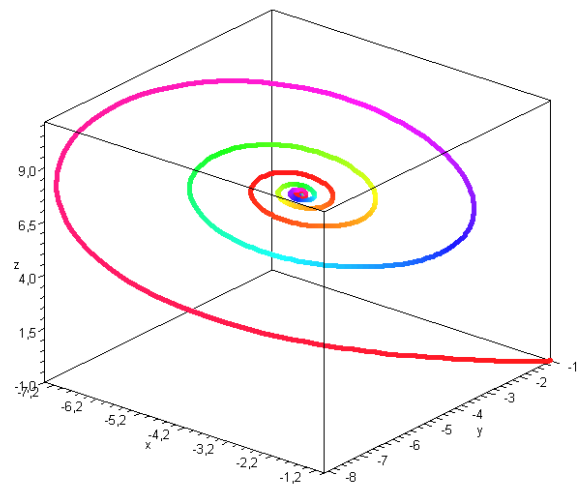


Рис. 1. Атрактор Лоренца при наступних параметрах: $\sigma=10$; $r=8$; $b=8/3$

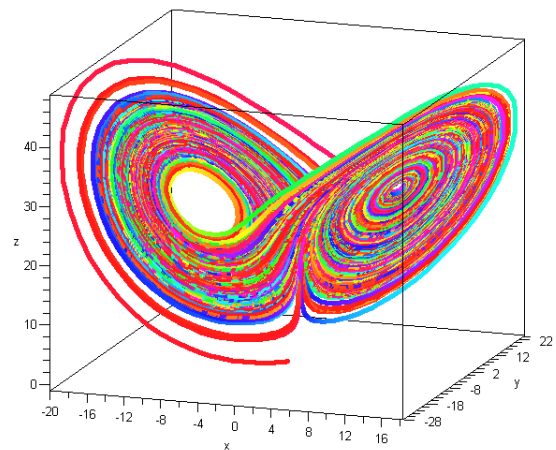


Рис. 2. Атрактор Лоренца при наступних параметрах: $\sigma=10$; $r=28$; $b=8/3$

Як видно з рис. 2 траєкторія стає хаотичною та нагадує крила метелика.

Тобто, якщо можливий перехід від структурованої системи до хаотичної, то можливий і перехід в зворотному напрямі. Але в літературі, на погляд автора, недостатньо уваги приділяється питанню як величини параметрів впливають на характер отриманих результатів.

Мета та задача. Мета статі – показати як за допомогою методу Монте-Карло можливе дослідження переходів від структурованої системи до хаотичної та навпаки в залежності від її параметрів.

Наукова новизна статі полягає в отриманні досить несподіваних результатів в залежності від значень параметрів системи.

Постановка задачі. Припустимо, що в є плоска фігура у формі трикутника рис. 3 координати вершин якого відомі.

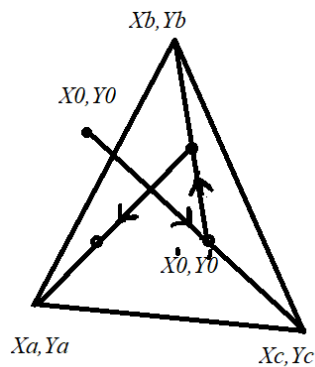


Рис. 3. Алгоритм вибору випадкової точки

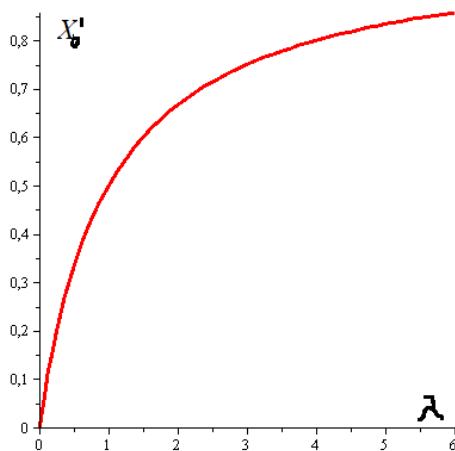
Візьмемо довільну точку з координатами X_0, Y_0 (не обов'язково в межах трикутника) та з'єднаємо її з випадково обраною вершиною трикутника (наприклад X_c, Y_c). Отриману пряму поділимо у співвідношенні λ та отримаємо нову точку рис. 3

$$X'_0 = \frac{X_0 + \lambda \cdot X_c}{1 + \lambda}, Y'_0 = \frac{Y_0 + \lambda \cdot Y_c}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

Вибір нової точки продовжимо по описаному алгоритму. З (2) видно, що величина λ може змінюватися в наступному діапазоні

$$0 \leq \lambda \leq \infty. \quad (3)$$

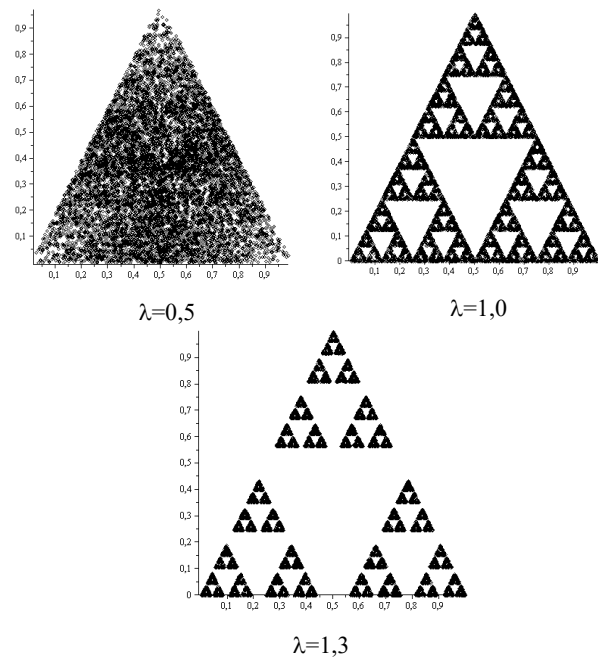
На рис. 4 показано як змінюється координата точки X'_0 в залежності від λ , якщо $X_0=0, X_c=1$.

Рис.4. Залежність координати від параметру λ

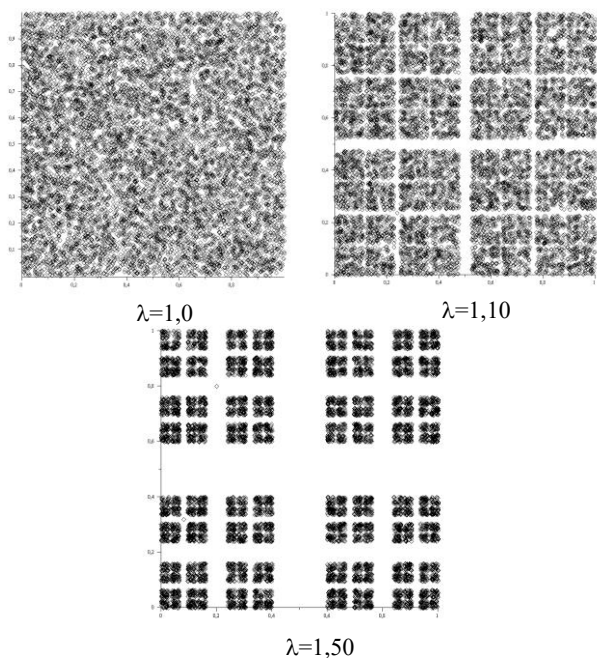
Задачею розрахунку буде встановлення залежності розподілу випадкових точок всередині різних геометричних фігур в залежності від параметру λ .

Розрахунки. При розрахунках кількість незалежних іспитів, які були змодельовані за допомогою методу Монте-Карло, дорівнювало 10000.

1. Розподіл випадкових точок в трикутнику.

Рис. 5. Розподіл випадкових точок в залежності від параметра λ

2. Розподіл випадкових точок в квадраті.

Рис. 6. Розподіл випадкових точок в квадраті в залежності від параметра λ

3. Розподіл випадкових точок в шестикутнику.

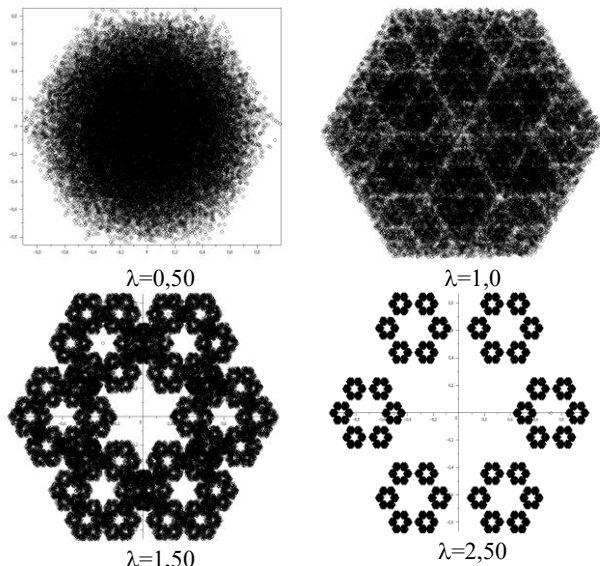


Рис. 7. Розподіл випадкових точок в шестикутнику в залежності від параметра λ

Як можна побачити з рисунків, перехід від хаотичного розподілення точок до структурованої системи для плоских фігур відбувається в залежності від параметру λ . Для виявлення подібних закономірностей для об'ємних фігур було по такому ж алгоритму розраховано розподіл випадкових точок всередині одиничного куба. При цьому координати точок вираховувались як

$$X'_0 = \frac{X_0 + \lambda \cdot X_c}{1 + \lambda}, Y'_0 = \frac{Y_0 + \lambda \cdot Y_c}{1 + \lambda}, Z'_0 = \frac{Z_0 + \lambda \cdot Z_c}{1 + \lambda}, \quad (4)$$

де індекс c належить до одної з восьми випадково вибраних вершин одиничного куба. При цьому для отримання чіткої картини, кількість випадкових точок була збільшена до 150000.

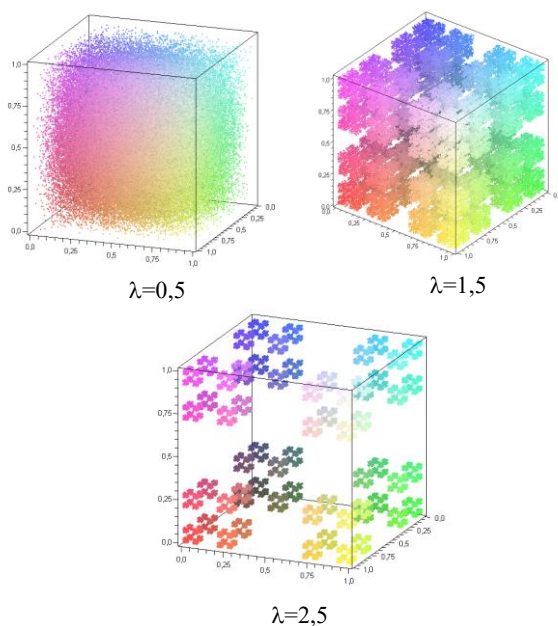


Рис. 7. Розподіл випадкових точок в одиничному кубі в залежності від параметра λ

Ще одним класичним прикладом хаотичного руху є процес нагріву рідини (нижня поверхня металевого

посуду), параметри якої є функціями температури. На рис. 8 наведено поле швидкостей рідини в вісієметричній системі координат.

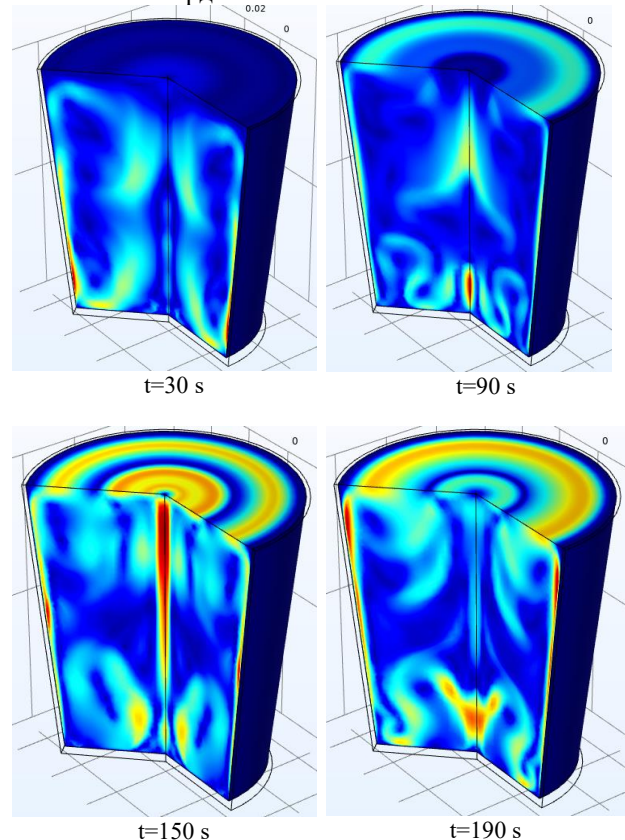


Рис. 8. Картина потоків рідини при її нагріві

А на рис. 9 показано швидкість руху рідини в точці, яка знаходиться всередині об'єму, що нагрівається.

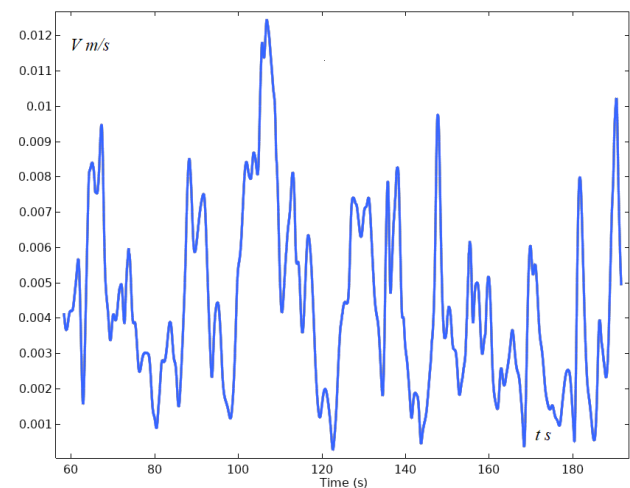


Рис. 9. Хаотичний рух рідини всередині рідини, що нагрівається

Таким чином, в нелінійних системах результати розрахунку суттєво залежать від параметрів системи та початкових умов, невелика зміна яких може привести до суттєвих та несподіваних змін в остаточному результаті. Окрім цього, при певних значеннях параметру у отриманих фракталах з'являються області, в які

точки, що отримані випадковим чином, ніколи попасти не в змозі, що само по собі ї дивним результатом.

Список літератури

1. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo methods. – J. Amer. statistical assoc., 1949, 44, №247, p. 355-341.
2. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. – 4-е изд. – М.: Наука, 1986, – 80 с.
3. Xinzhu Liang, Shangda Yang, Simon L. Cotter, Kody J. H. Law. A randomized multi-index sequential Monte Carlo method. Statistics and Computing (2023) 33:97. Volume 33, article number 97, (2023), pp 1-17. <https://doi.org/10.1007/s11222-023-10249-9>.
4. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Байда Є.І. Основи математичної статистики та теорії ймовірності. Навчально-методичний посібник для студентів та аспірантів електротехнічних спеціальностей всіх форм навчання / Є.І.Байда. – Харків: НТУ «ХПІ», 2020. – 37 с.
6. I. M. Sobol. A primer for the Monte Carlo method. CRC Press, Boca Raton, 1994, pp. 107.
7. Saulis, Leonas, Valakevičius, Eimutis, Aksomaitis, Algimantas Jonas, Janilionis, Vytautas, Navickas, Zenonas. Markovo grandinių Monte Karlo metodo taikymas stochastinėms sistemoms modeliuoti. Publisher: Lithuanian Academic Libraries Network (LABT) Kaunas University of Technology, 2011-08-31
8. Захаров И.П., Водотыка С.В. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях. – Системы обработки информации, 2008, вып. 4 (71), с. 34-37.
9. Г. Шустер. Детерминированный хаос. http://www.physics.gov.az/book_D/Schuster.pdf.

10. <http://mmf.lnu.edu.ua/le/ta/1966> (accessed 16.02.25)

References (transliterated):

1. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo methods. – J. Amer. statistical assoc., 1949, 44, № 247, p. 355-341.
2. Sobol I. M. Metod Monte-Karlo. – 4-e izd. – M.: Nauka, 1986, – 80 p.
3. Xinzhu Liang, Shangda Yang, Simon L. Cotter, Kody J. H. Law. A randomized multi-index sequential Monte Carlo method. Statistics and Computing (2023) 33:97. Volume 33, article number 97, (2023), pp. 1-17. <https://doi.org/10.1007/s11222-023-10249-9>.
4. Bendat J. Prikladnoy analiz sluchaynykh dannyykh / J. Bendat, A. Pirsoll. – M.: Mir, 1989. – 540 p.
5. Bayda Ye.I. Osnovy matematichnoyi statystyky ta teoriyi ymovirnosti. Navchalno-metodychnyy posibnyk dlya studentiv ta aspirantiv elektrotekhnichnykh spetsialnostey vsikh form navchannya / Ye.I. Bayda. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2020. – 37 p.
6. M. Sobol. A primer for the Monte Carlo method. CRC Press, Boca Raton, 1994, pp. 107.
7. Saulis, Leonas, Valakevičius, Eimutis, Aksomaitis, Algimantas Jonas, Janilionis, Vytautas, Navickas, Zenonas. Markovo grandinių Monte Karlo metodo taikymas stochastinėms sistemoms modeliuoti. Publisher: Lithuanian Academic Libraries Network (LABT) Kaunas University of Technology, 2011-08-31
8. Zakharov I.P., Vodotyka S.V. Primeneniye metoda Monte-Karlo dlya otsenivaniya neopredelennosti v izmereniyakh. – Systemy obrabotki informatsii, 2008, vyp. 4 (71), Pp. 34-37.
9. G. Shuster. Determinirovannyi kaos. http://www.physics.gov.az/book_D/Schuster.pdf.
10. <http://mmf.lnu.edu.ua/le/ta/1966> (accessed 16.02.25)

Надійшла (received) 30.03.2025

Відомості про авторів / About the authors

Байда Євген Іванович (Baida Evgen) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-328X>; e-mail: baida.kpi@gmail.com.