

Є.І. БАЙДА

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА

Вступ. В класичній теоретичній механіці та робототехніці для розрахунку складних механічних систем і отримання диференціальних рівнянь руху широко застосовуються рівняння Лагранжа. Гіпотезу про можливість застосування рівнянь Лагранжа для розрахунку електромеханічних систем висунув ще Д. Максвелл у 1873 році на базі методу електромеханічної аналогії, яка дає можливість описувати взаємодію між рухом точок, твердих тіл, електричних та електромагнітних явищ. Завдяки своїй універсальності (використання узагальнених координат та узагальнених сил) метод має чітку послідовність дій. **Мета та задачі.** Розробка та апробація методики моделювання електромеханічних систем із використанням лагранжевого формалізму, що дозволить ефективно описувати їхню динаміку та проводити розрахунки для інженерних задач. **Методи.** Методи, що використовувались даній статті: чисельні методи розв'язання системи нелінійних рівнянь – метод кінцевих різниць четвертого порядку. **Результати.** Отримано диференціальні рівняння розрахунку ІДМ (рушія Томсона) за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду з урахуванням дискретної зміни швидкості системи під дією імпульсної сили. **Висновки.** Рівняння Лагранжа є потужним інструментом аналітичної механіки, що дозволяють формалізувати динаміку складних електромеханічних систем з урахуванням енергетичних взаємозв'язків. Проте застосування цього підходу до електромеханічних систем потребує його адаптації та врахування специфіки фізичних процесів зіткнення, якщо такі відбуваються. Результати розрахунку ІДМ (рушія Томсона) за допомогою рівнянь Лагранжа, які отримані в даній статті, досить точно співпадають з очікуваними результатами (закон збереження імпульсу системи та величини втрати кінетичної енергії при не пружному зіткненні)

Ключові слова: рівняння Лагранжа для дискретних систем, індукційно-динамічний механізм, динаміка рушія Томсона.

E.I. BAIDA

FEATURES OF SOLVING ELECTROMECHANICAL PROBLEMS USING LAGRANGE EQUATIONS

Introduction. In classical theoretical mechanics and robotics, Lagrange's equations are widely used to calculate complex mechanical systems and obtain differential equations of motion. The hypothesis of the possibility of using Lagrange's equations to calculate electromechanical systems was put forward by D. Maxwell in 1873 on the basis of the method of electromechanical analogy, which makes it possible to describe the interaction between the motion of points, solids, electrical and electromagnetic phenomena. Due to its universality (the use of generalized coordinates and generalized forces), the method has a clear sequence of actions. **Purpose.** Development and testing of a methodology for modeling electromechanical systems using Lagrangian formalism, which will allow for effective description of their dynamics and calculations for engineering problems. **Methods.** Differential equations for calculating the IDM (Thompson thruster) using Lagrange equations of the second kind, taking into account the discrete change in the velocity of the system under the action of the impulse force, have been obtained. **Results.** The obtained results illustrate computational structures in which, under certain parameters, a transition occurs between chaotic and structured systems. **Conclusions.** Lagrange's equations are a powerful tool of analytical mechanics, allowing to formalize the dynamics of complex electromechanical systems taking into account energy relationships. However, the application of this approach to electromechanical systems requires its adaptation and taking into account the specifics of the physical processes of the collision, if any. The results of the calculation of the IDM (Thompson thruster) using the Lagrange equations, which are obtained in this article, quite accurately coincide with the expected results (the law of conservation of momentum of the system and the magnitude of kinetic energy loss in an inelastic collision).

Keywords: Lagrange's equation for discrete systems, induction-dynamic mechanism, dynamics of the Thompson thruster.

Вступ. Як показує практика, розрахунки динаміки навіть доволі простих електромеханічних систем є досить складними. Річ у тім, що вирішення такої задачі потребує одночасного вирішення декількох нестационарних задач: розрахунок електричного кола; розрахунок динаміки руху та розрахунок магнітної взаємодії частин електромеханічної системи. Одним з етапів вирішення такої задачі є отримання системи диференціальних рівнянь, що описують фізику процесів в електромеханічній системі.

В класичній теоретичній механіці та робототехніці для розрахунку складних механічних систем і отримання диференціальних рівнянь руху широко застосовуються рівняння Лагранжа [1-4]. Гіпотезу про можливість застосування рівнянь Лагранжа для розрахунку електромеханічних систем висунув ще Д. Максвелл у 1873 році на базі методу електромеханічної аналогії, яка дає можливість описувати взаємодію між рухом точок, твердих тіл, електричних та електромагнітних явищ [3-5]. Завдяки своїй універсальності (використання узагальнених координат та узагальнених сил) метод має чітку послідовність дій.

В загальному вигляді рівняння Лагранжа другого роду мають вигляд системи диференціальних рівнянь:

$$\left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) = 0 \quad (1)$$

де q – узагальнені координати; $\dot{q}$ – узагальнені швидкості; T – кінетична енергія системи; Q – узагальнена сила; $s=1 \dots n$; n – кількість ступенів свободи системи.

В (1) не входять реакції зв'язків, що є вагомою перевагою методу.

Послідовність дій для складання рівнянь Лагранжа:

- 1) визначити число ступенів свободи системи;
- 2) визначити систему координат та визначити незалежні узагальнені координати;
- 3) визначити узагальнені сили Q_i у відповідності до узагальнених координат;
- 4) визначити кінетичну енергію системи;
- 5) визначити часткові похідні від кінетичної енергії по швидкостям, а потім по часу $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$;
- 6) визначити часткові похідні від кінетичної енергії по координатам $\frac{\partial T}{\partial q_s}$;
- 7) отримані результати підставити в рівняння (1).

Постановка проблеми. У сучасному машинобудуванні та автоматизації дедалі більшого значення набувають електромеханічні системи, які поєднують електричні та механічні компоненти для досягнення високої точності та ефективності. Традиційні методи моделювання таких систем часто не враховують складну взаємодію між електричними та механічними підсистемами, що може призводити до неточностей у розрахунках та прогнозах поведінки системи.

Рівняння Лагранжа, як потужний інструмент аналітичної механіки, дозволяють формалізувати динаміку складних систем з урахуванням енергетичних взаємозв'язків. Проте, застосування цього підходу до електромеханічних систем потребує адаптації та врахування специфіки електричних елементів, таких як двигуни, датчики, та елементи керування. Проблема полягає в тому, що існує потреба в розробці узагальненої методики побудови математичних моделей електромеханічних систем на основі рівнянь Лагранжа, яка забезпечить точність, універсальність та зручність для подальшого аналізу та оптимізації.

Мета та задача. Розробка та апробація методики моделювання електромеханічних систем із використанням лагранжевого формалізму, що дозволить ефективно описувати їхню динаміку та проводити розрахунки для інженерних задач.

Наукова новизна статті полягає в уточненні існуючих теорій, аналізі та вдосконаленні наявних знань, де на відміну від існуючих підходів, у роботі реалізовано узагальнений лагранжевий підхід до моделювання електромеханічних систем, що враховує як механічні, так і електричні елементи в єдиному енергетичному формалізмі.

Постановка задачі. На основі рівнянь Лагранжа другого роду отримати диференціальні рівняння руху для двох електромеханічних систем – датчика та індукційно-динамічного механізму (рушія Томпсона або ІДМ), показаних на рис. 1 та рис. 2.

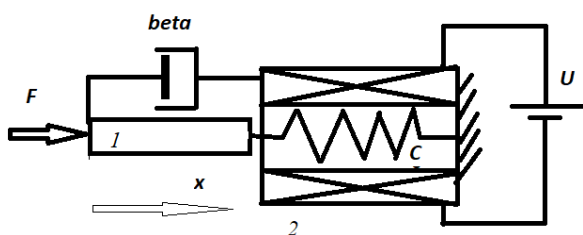


Рис. 1. Електромеханічний датчик, де 1 – якорь; 2 – котушка; F – періодична сила, що діє на якорь; β – коефіцієнт демпфування; c – жорсткість пружини; U – напруга джерела

Робота системи 1 (рис. 1): Під дією періодичної сили за рахунок зміни індуктивності системи в котушці буде виникати періодичний струм, який буде залежати від руху якоря.

Робота системи 2 (рис. 2): Схема підключення котушки 1 (рис. 2) до джерела енергії показана на рис. 3.

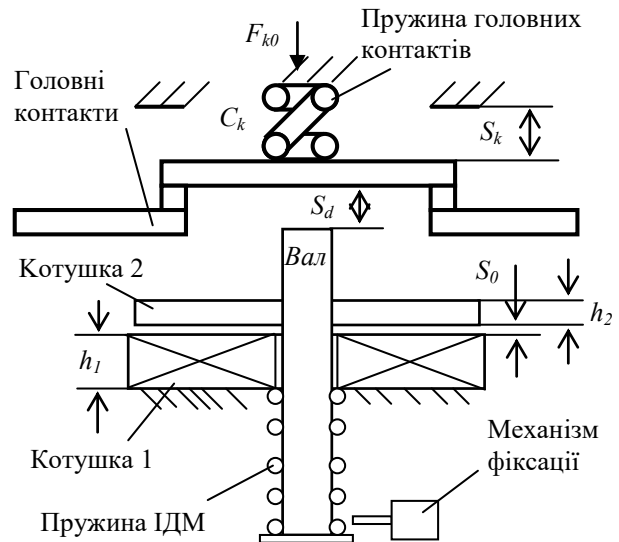


Рис. 2. Індукційно-динамічний механізм (рушія Томпсона), де S – початковий проміжок, вільний хід котушки 2 та контактів; c – жорсткість пружин; F – початкові сили, що діють на котушку 2 та контакти

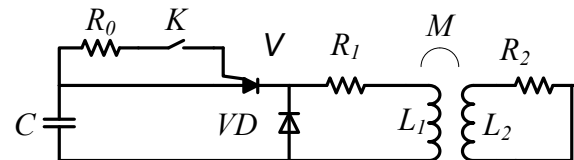


Рис. 3. Спрощена схема підключення котушки 1 до джерела енергії, де C – ємність конденсатора; R – активний опір котушок; VD – діод; L – індуктивність котушок; M – взаємна індуктивність

При розряді конденсатора за рахунок взаємодії магнітних полів котушки 1 та 2 виникає електромагнітна сила, що відштовхує котушки. Котушка 2 у процесі руху разом з валом розмикає головні контакти за малий проміжок часу (удар будемо вважати не пружинним). При подальшому ході головні контакти доходять до обмежувачів, а механізм фіксації фіксує їх в розімкненому положенні. Діод VD (рис. 3) забезпечує аперіодичну форму струму в котушці 1.

Розрахунки. Схема 1. Для схеми рис. 1 узагальненими координатами будуть хід якоря 1 та електричний заряд котушки 2. Дано якорю можливе узагальнене переміщення dx , вважаючи при цьому незмінним електричний заряд котушки, тоді робота активних сил буде

$$dA_x = F_x \cdot dx - c \cdot x \cdot dx - \beta \cdot v \cdot dx. \quad (1)$$

Узагальнена сила

$$Q_x = F_x - c \cdot x - \beta \cdot v, \quad (2)$$

де v – швидкість якоря.

Роботу електрорушійної сили вирахуємо при умові, що змінюється електричний заряд dq , а узагальнене переміщення $dx = 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} dA_q &= (U - q' \cdot R) \cdot dq \\ Q_q &= U - q' \cdot R, \end{aligned} \quad (3)$$

де R – активний опір котушки.

Кінетична енергія системи має дві складові – механічну та електрокінетичну

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x'^2 + \frac{1}{2} \cdot L(x) \cdot q'^2, \quad (4)$$

де x' – швидкість якоря; $L(x)$ – індуктивність якоря, що залежить від його ходу; q' – струм.

У результаті підстановки (2-4) в (1), отримаємо систему диференціальних рівнянь для електромеханічної системи 1.

$$\begin{aligned} m \cdot x'' - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot q'^2 &= F_x - c \cdot x - \beta \cdot \dot{x}; \\ L(x) \cdot q'' + \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot x' + R \right) \cdot q' &= U, \end{aligned} \quad (5)$$

де x'' – прискорення якоря; q'' – друга похідна від електричного заряду.

Рівняння (5) можна переписати у більш зручному вигляді

$$\begin{cases} m \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot i^2 = F_x - c \cdot x - \beta \cdot v, \\ \frac{dx}{dt} = v, \\ L(x) \cdot \frac{di}{dt} + \left(\frac{\partial L(x)}{\partial x} \cdot v + R \right) \cdot i = U, \end{cases} \quad (6)$$

де v – швидкість якоря; i – струм котушки.

Рівняння (6) треба доповнити начальними умовами.

Схема 2. Розрахунок удару з використанням рівнянь Лагранжа – нетривіальне завдання, тому що класичні рівняння Лагранжа застосовуються до гладких (безперервних) систем, тоді як удар – це дискретна, миттєва зміна швидкостей, спричинена дією імпульсної сили.

Тим не менш, можна використовувати модифікований лагранжев формалізм для аналізу удару, використовуючи наступні кроки:

- 1) до удару система описується стандартними рівняннями Лагранжа;
- 2) під час удару вважаємо, що координати руху системи не змінюються, а швидкість зазнає стрибка;
- 3) застосувати на час удару рівняння Лагранжа в імпульсній формі;
- 4) провести повний аналіз, що включає інтегрування рівнянь до удару, застосування імпульсного закону удару, потім рух після удару.

Тобто рівняння Лагранжа застосовують до і після удару окремо, з відповідними початковими умовами (стрибками швидкостей).

Електромеханічна система, що складається з нерухомої котушки та індуктора (рис. 2, рис. 3) має три ступені свободи, тому буде мати і три узагальнені координати. Одна з них – переміщення x , що визначає положення якоря. Друга – $q1$, електричний заряд, що характеризує стан електричного ланцюга нерухомої котушки. Третя ступень свободи – електричний заряд, що характеризує стан електричного ланцюга рухомої котушки – $q2$.

Цим узагальненим координатам буде відповідати система рівнянь Лагранжа відповідно до модифікації (за дуже малий проміжок часу переміщення точки прикладення сили дорівнює нулю)

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial x'} \right) = Q_x, \\ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) = Q_{q1} \\ \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = Q_{q2}. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо послідовно давати зміну одній узагальненій координаті рахуючи незмінними всі інші, можна отримати роботу активних сил на узагальнених переміщеннях

$$\begin{aligned} dA_x &= \begin{pmatrix} x < S_d, & -F_d - c_d \cdot x \\ S_d \leq x \leq S_k, & -F_d - c_d \cdot x - F_k - c_k \cdot (x - S_d) \end{pmatrix} \cdot dx; \\ dA_{q1} &= \begin{cases} \left[U_0 - \frac{q_1}{C}, \text{ якщо } U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right. \\ \left. 0, \text{ якщо } U_0 - \frac{q_1}{C} \leq 0 \right] - q'_1 \cdot R_1 \end{cases} \cdot dq_1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$dA_{q2} = -q'_2 \cdot R_2 \cdot dq_2,$$

де F – початкові сили що діють на рухому котушку та контакти, c – жорсткості пружин рухомої котушки та контактів; S – вільний хід рухомої котушки та контактів; U_0 – початкова напруга на конденсаторі; C – ємність конденсатора; $R1$ – активний опір нерухомої котушки; R_2 – активний опір рухомої котушки.

Розрахуємо кінетичну енергію системи, але для того щоб не вирішувати два окремих рівняння руху зробимо наступне – задамо рухому масу як функцію зміщення $m_d = m_d(x)$, тоді

$$T = \frac{m_d(x) \cdot x'^2}{2} + \frac{L_1 \cdot q_1'^2}{2} + \frac{L_2 \cdot q_2'^2}{2} + M(x) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2, \quad (9)$$

де T – кінетична енергія системи; $m_d(x)$ – маса рухомих частин, яка змінюється в залежності від величини ходу; L_1 – індуктивність нерухомої котушки; L_2 – індуктивність рухомої котушки; $M(x)$ – взаємна індуктивність котушок, яка змінюється в залежності від ходу.

Зробивши відповідні перетворення можна отримати диференціальні рівняння системи у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial m_d(x)}{\partial x} \cdot \frac{v^2}{2} + m_d(x) \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot i_1 \cdot i_2 = \\ -F_d - c_d \cdot x - (F_k - c_k \cdot (x - S_d)) \cdot (x \geq S_d), \\ v = \frac{dx}{dt}, \\ L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot v \cdot i_2 + M(x) \cdot \frac{di_2}{dt} = \\ \left(U_0 - \frac{q_1}{C} \right) \cdot \left(U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right) - i_1 \cdot R_1 \\ L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{\partial M(x)}{\partial x} \cdot v \cdot i_1 + M(x) \cdot \frac{di_1}{dt} = -i_2 \cdot R_2, \\ i_1 = \frac{dq_1}{dt}, \end{cases} \quad (10)$$

де v – швидкість системи; i – струм котушок; $(x \geq S_d)$,

$\left(U_0 - \frac{q_1}{C} > 0 \right)$ – умовні оператори, які дорівнюють одиниці, якщо умова виконується та нулю, якщо ні.

Система (10) повинна бути доповнена початковими умовами.

Як можна побачити, в (10) необхідно розрахувати власні та взаємну індуктивності, а також похідну від взаємної індуктивності. В [6] дана формула розрахунку індуктивності між двома круговими витками

$$dM_{ij} = \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot K \cdot \frac{(2 \cdot \sin^2 \varphi - 1)}{\sqrt{1 - K^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \cdot d\varphi;$$

$$K^2 = \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2};$$

$$\varphi = \frac{\pi - \vartheta}{2},$$

де μ_0 – магнітна проникність; r – радіуси витків; h – відстань між витками, яка включає в себе узагальнену координату x .

Похідна від (11) по змінній h буде мати вигляд

$$\frac{\partial(dM_{i,j})}{\partial h} = - \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot (2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1) \cdot r_i \cdot r_j \cdot h}{\sqrt{\frac{r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \sin^2(\varphi)}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot (h^2 + (r_i + r_j)^2)^2} \cdot d\varphi -$$

$$- \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot \sqrt{r_i \cdot r_j} \cdot \sqrt{\frac{r_i \cdot r_j}{h^2 + (r_i + r_j)^2}} \cdot (2 \cdot \sin^2(\varphi) - 1) \cdot r_i \cdot r_j \cdot h \cdot \sin^2(\varphi)}{\left(1 - \frac{4 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \sin^2(\varphi)}{h^2 + (r_i + r_j)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (h^2 + (r_i + r_j)^2)^2} \cdot d\varphi$$

Тоді

$$M = \frac{w_1 \cdot w_2}{S_1 \cdot S_2} \cdot \iint_{S_1 S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dM_{ij} \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot d\varphi;$$

$$L_1 = \frac{w_1^2}{S_1^2} \cdot \iint_{S_1 S_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dM_{ij} \cdot dS_1 \cdot dS_1 \cdot d\varphi;$$

$$L_2 = \frac{w_2^2}{S_2^2} \cdot \iint_{S_2 S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dM_{ij} \cdot dS_2 \cdot dS_2 \cdot d\varphi;$$

$$\frac{\partial M}{\partial h} = \frac{w_1 \cdot w_2}{S_1 \cdot S_2} \cdot \iint_{S_1 S_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial(dM_{ij})}{\partial h} \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot d\varphi,$$

де S – площі поперечного перерізу котушок; w – кількість витків в котушках.

Розрахувати інтеграли (13) можна (наприклад) методом Монте-Карло [7]. Але отримані цим методом дані потребують математичної обробки бо:

бажано мати аналітичну залежність взаємної індуктивності та її похідної від відстані між котушками;

метод Монте-Карло розраховує інтеграли з деякою похибкою і отримані результати (при тих самих початкових умовах) будуть дещо відрізнятися.

Тому бажано для кожного значення відстані між котушками використовувати середнє значення розрахованої функції по яких в подальшому методом найменших квадратів розраховуються аналітичні залежності

$$M(x) \text{ та } \frac{\partial M(x)}{\partial x}.$$

Для перевірки отриманих формул було проведено динамічний розрахунок ІДМ з такими параметрами: 1) розміри котушок – внутрішній радіус – 5 мм, зовнішній – 45 мм; 2) кількість витків – 200 і 100; відстань між котушками (0 – 10) мм; 3) маса рухомих частин – 0,1 кг, контактів – 0,25 кг, хід вала до зіткнення з контактами – 5 мм.

Залежність маси системи від ходу показана на рис. 4, а на рис. 5 показана силова протидіюча характеристика.

Розрахункові електричні параметри: 1) початкова напруга на конденсаторі – 400 В, ємність – 400 мкФ; 2) власні індуктивності та активний опір котушок – 3,43 мГн, 0,34 мГн, 0,68 Ом, 0,34 Ом.

Взаємна індуктивність та її похідна були розраховані методом Монте-Карло з наступною обробкою результатів за допомогою методу найменших квадратів.

$$M(x) = 5,83 \cdot 10^{-5} \cdot \exp(-157,24 \cdot x),$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = -3,4 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-177,37 \cdot x).$$

Залежність маси від ходу.

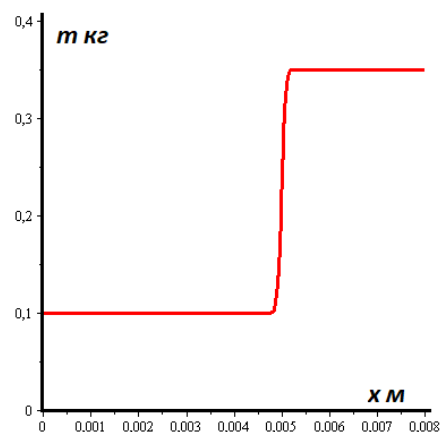


Рис. 4. Залежність маси від ходу вала

Механічна протидіюча характеристика.

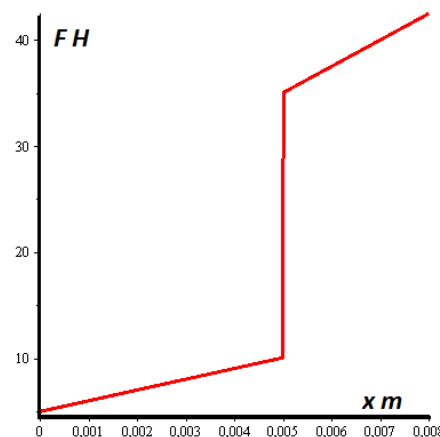


Рис. 5. Протидіюча механічна характеристика

Отримані результати. На основі отриманих формул (10) з урахуванням (11-13) при нульових початкових умовах було проведено розрахунок ІДМ, параметри якого наведено вище. Розрахунок системи диференціальних рівнянь здійснювався чисельним методом.

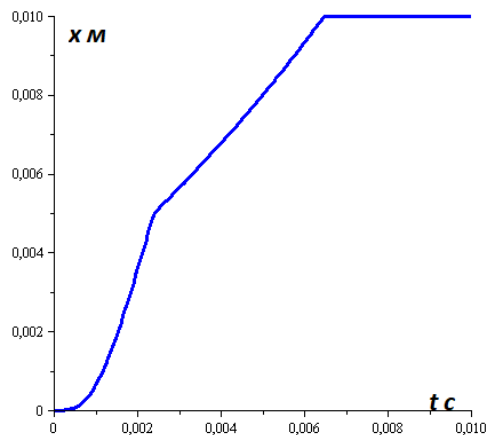


Рис. 6. Залежність ходу вала і котушки від часу

Зміна швидкості систем, що рухається показана на рис. 7.

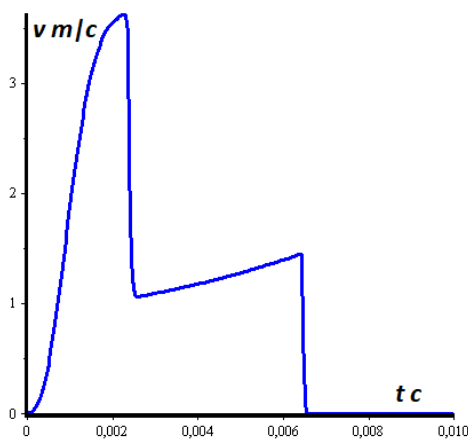


Рис. 7. Зміна швидкості системи в залежності від часу

Перевірка адекватності отриманих результатів теоретичним частково може бути здійснена по наступним критеріям: координата руху системи не змінюється; швидкість змінюється стрибком. Як видно з рис. 6, перший критерій виконується. Виконання другого критерію пов'язано з законом збереження імпульсу системи. При абсолютно не пружному зіткненні відношення швидкостей після удару і до удару повинно скласти

0,285, тобто $\left(\frac{0,1}{0,1 + 0,25} \right)$. А як можна відмітити з рис.

7, це співвідношення становить 0,294, що відрізняється на 3% від теоретично розрахованого. Тобто, можна стверджувати, що математична модель доволі точно відображає фізику процесів, що відбуваються в системі.

На подальших рисунках показані деякі отримані результати.

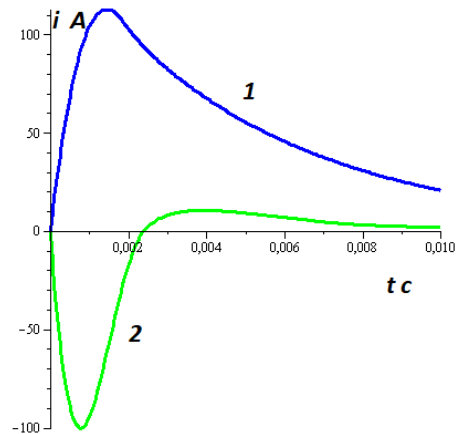


Рис. 8. Струми котушок:
1 – нерухома котушка; 2 – рухома котушка

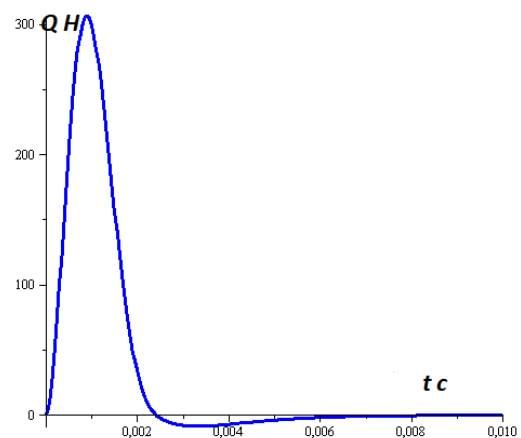


Рис. 9. Електромагнітна сила в залежності від часу

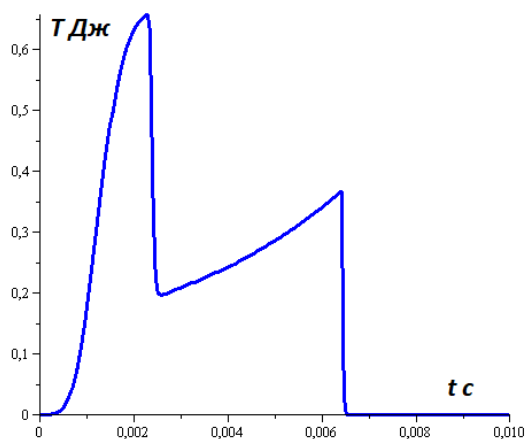


Рис. 10. Зміна кінетичної енергії системи

З рис. 10 виходить, що згідно з припущенням, в момент удару відбувається втрата кінетичної енергії, причому, отримані дані співпадають з даними, які повинні бути отримані теоретично (значення кінетичної енергії до удару та після не пружного зіткнення).

Висновки. Рівняння Лагранжа є потужним інструментом аналітичної механіки, що дозволяють формалізувати динаміку складних електромеханічних систем з урахуванням енергетичних взаємозв'язків. Проте, застосування цього підходу до електромеханічних

систем потребує його адаптації та врахування специфіки фізичних процесів зіткнення, якщо такі відбуваються. Результати розрахунку ІДМ (рушія Томсона) за допомогою рівнянь Лагранжа, які отримані в даній статті, досить точно співпадають з очікуваними результатами (закон збереження імпульсу системи та величині втрати кінетичною енергії при не пружному зіткненні), тобто доводять можливість застосування рівнянь Лагранжа до розрахунку таких систем.

Список літератури

1. М. І. Карбованець, В. Ю. Лазар, Є. А. Нодь. Теоретична механіка. Частина 1. Метод рівнянь Лагранжа - навчальний посібник. – Ужгород. Видавництво Уж. НУ «Говерла», 2019. – 82 с.
2. Zehar D., Behih K., Cherif A. Robust control of single input multi outputs systems. Electrical Engineering & Electromechanics, 2025, no. 4, pp. 20–25. doi: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2025.4.03>
3. М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. Теоретична механіка в прикладах та задачах. Видавництво «Наука». Головне видавництво фізико-математичної літератури, т. 2. – М.; 1972 г. – 624 с.
4. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – ст. 9-22, 171-173 - ISBN 5-9221-0055-6 (Т. I).
5. Є. І. Байда. Розв'язання електромеханічних задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду - навчальний посібник. – Харків. Електронне видання Харківський національний технічний університет «НТУ ХПІ», 2025. – 90 с. <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/91384>
6. Рамо С., Уинери Дж. Поля та хвилі в сучасній радіотехніці. Видання друге, перероблене. М.-Л., ГИТТЛ, 1950 г. 568 с.
7. Є. І. Байда. Метод Монте-Карло. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Пакети прикладних програм для розв'язання

мультифізичних задач» для здобувачів ступеня доктор філософії зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» усіх форм навчання. Харків.: НТУ «ХПІ», 2024 р. – 74 с. <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80846>

References (transliterated):

1. M.I. Karbovanets, V.Yu. Lazar, Ye.A. Nod. *Teoretychna mekhanika. Chastyna 1. Metod rivnian Lahranzha – navchalnyi posibnyk.* – Uzhhorod. Vydavnytstvo Uzh. NU «Hoverla», 2019. – 82 p.
2. Zehar D., Behih K., Cherif A. Robust control of single input multi outputs systems. Electrical Engineering & Electromechanics, 2025, no. 4, pp. 20–25. doi: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2025.4.03>
3. M. I. Bat, H. Yu. Dzhanelidze, A. S. Kelzon. *Teoretychna mekhanika v prykladakh ta zadachakh.* Vydavnytstvo «Nauka». Holovne vydavnytstvo fizyko-matematychnoi literatury, t. 2. – M.; 1972. – 624 p.
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoretycheskaia fizika: Ucheb. posob.: Dlia vuzov. V 10 t. T. I. Mekhanika.* – 5-e izd., stereot. – M.: FIZMATLIT, 2004. – Pp. 9–22, 171–173 – ISBN 5-9221-0055-6 (T. I).
5. Ye.I. Baida. *Rozv'iazannia elektromekhanichnykh zadach za dopomohoiu rivnian Lahranzha druho rodu – navchalnyi posibnyk.* – Kharkiv. Elektronne vydannia Kharkivskiy natsionalnyi tekhnichnyi universytet NTU “KhPI”, 2025. – 90 p. <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/91384>.
6. Ramo S., Uinery Dzh. *Polia ta khvyli v suchasni radiotekhnitsi.* Vydannia druhe, pereroblene. M.-L., HITTI, 1950. – 568 p.
7. Ye. I. Baida. *Metod Monte-Karlo. Navchalno-metodychnyi posibnyk z dystsypliny «Pakety prykladnykh prohran dlia rozv'iazannia multyfizychnykh zadach» dlia zdobuvachiv stupenia doktor filosofii zi spetsialnosti 141 «Elektroenerhetyka, elektrotekhnika ta elektromekhanika» usikh form navchannia.* Kharkiv.: NTU «KhPI», 2024. – 74 p. <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/80846>

Надійшла (received) 03.09.2025

Відомості про авторів / About the authors

Байда Євген Іванович (Baida Evgen) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-328X>; e-mail: baida.kpi@gmail.com.