

М.Г. ПАНТЕЛЯТ, канд. фіз.-мат. наук, НТУ "ХПІ"

А.В. ТРОФІМОВ, студент, НТУ "ХПІ"

МЕТОДИКА СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНОГО АНАЛІЗУ ТЕПЛООВОГО СТАНУ ІНДУКЦІЙНОЇ КУХОННОЇ ПЛИТИ ТА ПОСУДУ, ЩО НАГРІВАЄТЬСЯ

В статті запропонована методика чисельного аналізу теплових процесів в основних конструктивних елементах індукційних кухонних плит і у посуді, що нагрівається. Математична модель розподілу температурного поля в конструкціях, що розглядаються, представляє собою нестационарне рівняння теплопровідності з граничними умовами, що описують конвективний теплообмін з оточуючим середовищем. Розрахунок виконується у двовимірній постановці методом скінчених елементів. У загальному випадку, враховуються залежності теплофізичних властивостей матеріалів від температури.

Ключові слова: індукційна кухонна плита, теплове поле, комп'ютерне моделювання, метод скінчених елементів.

Вступ. В роботах [1, 2] запропоновано інженерну методику розрахунку побутових індукційних кухонних плит, а також математичну модель та методику чисельного аналізу розподілу електромагнітного поля плити. Наступним кроком у комплексному дослідженні цього іновативного класу електропобутової техніки є комп'ютерне моделювання теплового стану конструкцій, що розглядаються, а саме розподілу температурного поля конструкції плити та, найголовніше, посуду, що нагрівається. Подальшим етапом розрахунків автори вважають комп'ютерне моделювання зв'язаних (мультифізичних) електромагнітних та теплових явищ, що мають місце в процесі роботи індукційних кухонних плит, з урахуванням їх взаємного впливу одне на інше.

Мета роботи – розробка математичної моделі та методики чисельного аналізу розподілу температурного поля індукційної кухонної плити та посуду, що нагрівається. Отримані результати комп'ютерного моделювання будуть проаналізовані в наступних роботах.

Математична модель теплових процесів в індукційних плитах та посуді, що нагрівається. Математична модель електромагнітних процесів в індукційних плитах розроблена та детально описана в [2]. За аналогією, побудуємо математичну модель теплових процесів, яка має наступні основні елементи:

© М.Г. Пантелят, А.В. Трофімов, 2015

• основне рівняння, що описує явище або процес, що досліджується (в нашому випадку – розподіл температурного поля посуду, що нагрівається, а також конструктивних елементів індукційної кухонної плити)

• обґрунтовані припущення, що дозволяють спростити рівняння, що підлягає розв'язанню

• геометрія об'єкта, що досліджується (в нашому випадку – конструкція індукційної кухонної плити та посуду), та міркування, що дозволяють її спростити (наприклад, умови симетрії конструкції, що розглядається)

• початкові та граничні умови

• властивості матеріалів конструкції та їх нелінійні характеристики (у випадку індукційної плити – теплофізичні властивості: величини теплопровідності, теплоємності та щільності та їх залежності від температури)

• величини, що характеризують сторонні джерела тепла (у випадку, що розглядається: розподіл внутрішніх джерел тепла електромагнітного походження, отриманий в результаті комп'ютерного моделювання розподілу електромагнітного поля [2])

Розглянемо послідовно побудову математичної моделі теплових процесів в індукційних кухонних плитах та посуді, що нагрівається.

1) Тепловий стан (розподіл температури у просторі та часі) конструкції у загальному випадку описується нестационарним рівнянням теплопровідності [3, 4]

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right) = -Q, \quad (1)$$

де T – температура, що змінюється у просторі та у часі; λ – теплопровідність матеріалу; ρ – щільність матеріалу; c_p теплоємність матеріалу; \mathbf{v} – вектор швидкості відповідного елемента конструкції; Q – потужність внутрішніх джерел тепла. У загальному випадку, величини λ , ρ та c_p (теплофізичні властивості матеріалів) залежать від температури.

2) Основні конструктивні елементи індукційної кухонної плити (індуктор, магнітопровід та посуд, що нагрівається) є нерухомими, отже рівняння (1) за відсутності "швидкісного" члена приймає вигляд:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -Q. \quad (2)$$

Математичне моделювання розподілу теплового поля індукційної кухонної плити доцільно розпочати у двовимірній постановці (як і у

випадку комп'ютерного аналізу електромагнітних процесів [2], значно більш складна тривимірна постановка та відповідне програмне забезпечення можуть бути використані пізніше для уточнення отриманих результатів) у декартовій системі координат. Тоді рівняння (2), що підлягає розв'язанню, може бути записано наступним чином [5]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q. \quad (3)$$

Розподіл у просторі та у часі щільності теплових втрат (потужності внутрішніх джерел тепла) $Q(x,y,t)$ у електропровідних елементах конструкції вважається відомим за результатами розрахунку розподілу електромагнітного поля та щільності вихрових струмів $J_e(x,y,t)$ [2, 5]:

$$Q = \frac{|j_e|^2}{\gamma}, \quad (4)$$

де γ – питома електрична провідність матеріалу.

3) Розподіл електромагнітного поля індукційної кухонної плити визначається [2] стосовно її індукторної системи, що складається з наступних електропровідних та неелектропровідних елементів (рис. 1): індуктор 1; посуд, що нагрівається, 2; магнітопровід 3; діелектрик (повітря) 4.

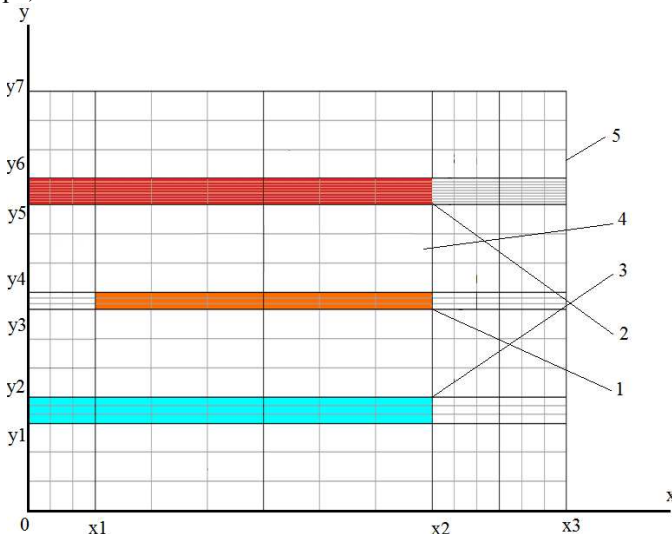


Рис. 1 – Розрахункова модель індукторної системи плити

Комп'ютерне моделювання теплового стану доцільно виконувати [5] у рамках єдиної обчислювальної процедури лише стосовно окремо кожного з електропровідних конструктивних елементів, а саме посуду 2 та магнітопроводу 3, виключаючи з розгляду суттєві за об'ємом діелектричні підобласті 4. Це дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати, необхідні для комп'ютерного розв'язання задачі. Можливо також виконати розрахунок температурного поля індуктора 1 в процесі роботи індукційної кухонної плити. Як і при розрахунках електромагнітних процесів, доцільно врахувати умови геометричної симетрії конструкції, а також симетричного розподілу теплового поля в ній: віссю симетрії є вертикальна вісь ординат Oy (див. рис. 1), отже розрахунок виконується лише для половини кожного з конструктивних елементів, що розглядаються. Це теж дозволяє значно заощадити потрібні обчислювальні ресурси.

4) Нестационарне рівняння у часткових похідних (3) розв'язується за наступними початковими умовами [3, 5]:

$$T(x,y,0) = T_0, \quad (5)$$

де T_0 – початкове значення температури (наприклад, кімнатна температура 20°C), як правило постійне по всьому перетину конструктивних елементів, що розглядаються.

Розглянемо граничні умови, за якими розв'язується рівняння (3). Оскільки, як було зазначено вище, комп'ютерний аналіз теплового стану виконується у рамках єдиної обчислювальної процедури лише стосовно окремо кожного з електропровідних конструктивних елементів, а саме посуду 2, магнітопроводу 3 та індуктора 1, виключаючи з розгляду діелектричні підобласті 4, граничні умови задаються окремо для кожного з конструктивних елементів (1, 2 та 3, див. рис. 1), що розглядаються:

- на вертикальній вісі ординат Oy : природні граничні умови симетрії [3, 5]:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

де n – зовнішня нормаль до вісі ординат Oy , отже умови (6) приймають вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Граничні умови (6), (7) задаються окремо для відповідних границь вісі ординат Oy (див. рис. 1) посуду $[y_5; y_6]$, магнітопроводу $[y_1; y_2]$ та індуктора $[y_3; y_4]$ (у випадку відсутності внутрішнього отвору

в останньому, тобто якщо $x_1 = 0$).

• у випадку "суцільного" магнітопроводу, тобто якщо $y_1 = 0$, на горизонтальній вісі абсцис Ox для відрізка $[0; x_2]$: природні граничні умови симетрії [3, 5]:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (8)$$

де n – зовнішня нормаль до вісі абсцис Ox , отже умови (8) приймають вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

• на усіх інших границях посуду 2, магнітопроводу 3 та індуктора 1 з діелектричними (повітряними) підобластями 4, наприклад обидва відрізка $[0; x_2]$ (при $y=y_5$ та $y=y_6$) та відрізок $[y_5; y_6]$ при $x=x_2$ (див. рис. 1): граничні умови третього роду [3-5], що описують конвективний теплообмін електропровідної поверхні з оточуючим простором:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_\infty), \quad (10)$$

де λ – теплопровідність матеріалу відповідної електропровідної поверхні; n – зовнішня нормаль до поверхні, що розглядається; α – коефіцієнт теплообміну з зовнішнім середовищем, що суттєво залежить від виду та швидкості охолоджувача [3]; T_∞ – температура зовнішнього середовища (охолоджувача). Величини α та T_∞ задаються у вихідних даних окремо для кожної з границь, що беруться до уваги в процесі виконання розрахунків.

5) Для чисельного розв'язання рівняння (3) потрібно задати у вихідних даних наступні теплофізичні властивості матеріалів посуду 2, магнітопроводу 3 та індуктора 1 (див. рис. 1) та їх залежності від температури: λ – теплопровідність матеріалу; ρ – щільність матеріалу; c_p – теплоємність матеріалу. Для виконання попередніх "оціночних" розрахунків можливо розв'язання лінійної задачі з постійними значеннями вказаних властивостей матеріалів.

6) При розв'язанні рівняння (3) в якості правої частини задається розподіл у просторі та у часі щільності теплових втрат (потужності внутрішніх джерел тепла) $Q(x, y, t)$ у електропровідних елементах конструкції (4), отриманий за результатами розрахунку розподілу електромагнітного поля та щільності вихрових струмів.

Методика чисельного розв'язання задачі. Сформульовану вище двовимірну задачу комп'ютерного моделювання розподілу теплового

поля конструкційних елементів побутових індукційних плит, що включає рівняння (3) з початковими умовами (5) та граничними умовами (6)-(10), доцільно розв'язувати добре розвинутим методом скінчених елементів [5]. При цьому використовується програмне забезпечення, розроблене раніше [5], або інші програмні продукти, призначені для розрахунку нестационарних теплових полів у двовимірній постановці.

Структура вихідних даних для виконання розрахунків. Для комп'ютерного моделювання розподілу теплового поля основних конструктивних елементів побутової індукційної плити, тобто для чисельного розв'язання рівняння (3) з початковими умовами (5) та граничними умовами (6)-(10) стосовно відповідних окремих розрахункових під областей 1, 2 та 3, зображених на рис. 1, у вихідних даних необхідно задати наступне:

1) геометричні розміри половини конструкції індуктора, посуду та магнітопровода окремо: x_1 , x_2 та y_1 - y_6 (див. рис. 1)

2) теплофізичні властивості матеріалів посуду 2, магнітопроводу 3 та індуктора 1 (див. рис. 1) та їх залежності від температури: λ – теплопровідність матеріалу; ρ – щільність матеріалу; c_p – теплоємність матеріалу; в якості приклада на рис. 2, 3 наведені залежності від температури теплофізичних властивостей алюмінію [4].

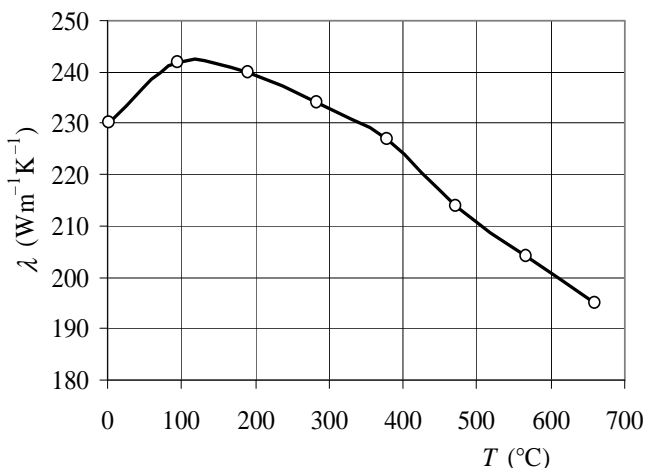


Рис. 2 – Залежність теплопровідності алюмінію від температури [4]

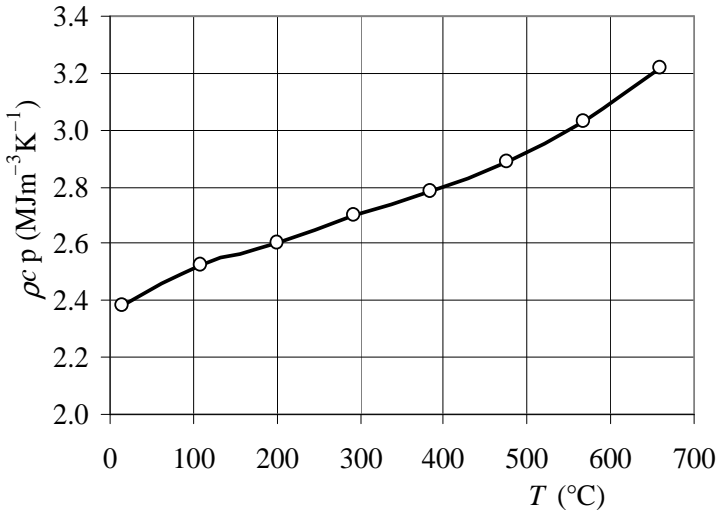


Рис. 3 – Залежність теплоємності алюмінію від температури [4]

3) розподіл у просторі та у часі щільності теплових втрат (потужності внутрішніх джерел тепла) $Q(x,y,t)$ у електропровідних елементах конструкції (4), отриманий за результатами розрахунку розподілу електромагнітного поля та щільності вихрових струмів [2]. При виконанні комп'ютерного моделювання потрібно організувати автоматичну передачу розподілу $Q(x,y,t)$ з програмного забезпечення, призначеного для розрахунку електромагнітних процесів (наприклад, [5, 6]), до відповідних процедур скінченоелементного аналізу розподілу температурного поля [5]. При цьому, величини щільності теплових втрат (потужності внутрішніх джерел тепла) задаються у вузлах скінченоелементної сітки, яка повинна бути узгоджена для обох задач (моделювання електромагнітних та теплових процесів), що розв'язуються послідовно

4) початкове значення температури T_0 (як правило, вказується, постійна по всьому перетину конструктивних елементів кімнатна температура 20°C, хоча в загальному випадку можливо задати довільний просторовий початковий розподіл температури)

5) величини коефіцієнт теплообміну з зовнішнім середовищем α та температури зовнішнього середовища (охолоджувача) T_∞ для кожної з границь, що розглядаються. Величини α та T_∞ суттєво залежать від виду та швидкості охолоджувача (наприклад, повітряне охолодження індуктора плити за допомогою вентилятора або водяне охолодження

конструктивних елементів), отже для їх коректного задавання потрібно скористатися відповідною довідковою літературою або навіть провести додаткові дослідження [4].

Структура результатів обчислень. Результатом комп'ютерного моделювання є розподіл у просторі та часі температурного поля конструктивних елементів індукційної кухонної плити, що розглядаються. Доцільно також здійснити автоматичну "зворотну" передачу отриманого розподілу температури $T(x,y,t)$ до програмного забезпечення, призначеного для скінченоелементного аналізу розподілу електромагнітного поля [5, 6], для розв'язання зв'язаних задач з урахуванням залежностей електрофізичних властивостей матеріалів від температури [5]. Відповідні алгоритми комп'ютерного моделювання зв'язаних (мультифізичних) електромагнітних та теплових явищ, що мають місце в процесі роботи індукційних кухонних плит, з урахуванням їх взаємного впливу одне на інше, будуть описані в наступних роботах.

Висновки. У роботі побудовано математичну модель та методику чисельного аналізу розподілу теплового поля основних конструктивних елементів індукційної кухонної плити у двовимірній постановці методом скінчених елементів. Враховуються залежності від температури теплофізичних властивостей конструкцій, що розглядаються. Наведено структуру вихідних даних та результатів обчислень. Отримані результати розрахунків будуть проаналізовані в наступних роботах.

Список літератури: 1. *Пантелят М.Г., Гуренцов Ю.В., Трофімов А.В.* Методика розрахунку індукторів індукційних кухонних плит // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2014. – № 20 (1063). – С. 13-24. 2. *Пантелят М.Г., Гуренцов Ю.В.* Методика комп'ютерного моделювання методом скінчених елементів розподілу електромагнітного поля індукційної кухонної плити // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2014. – № 41 (1084). – С. 16-24. 3. *Holman J.P.* Heat Transfer. – New York : McGraw-Hill, 2002. – 688 p. 4. *Doležel I., Karban P., Mach F.* Induction heating of rotating nonmagnetic billet in magnetic field produced by high-parameter permanent magnets // Електротехніка і електромеханіка. – 2014. – № 2. – С. 32-36. 5. *Pantelyat M.G., Féliachi M.* Magneto-thermo-elastic-plastic simulation of inductive heating of metals // The European Physical Journal Applied Physics. – 2002. – v. 17. – P. 29-33. 6. Tutorial EleFAnT2D. <<http://www.igte.tugraz.at/de/elefant/elefant.html>>.

Bibliography (transliterated): 1. *Pantelyat M.G., Gurentsov Ju.V., Trofimov A.V.* "A technique for inductor cookers' inductors calculation". *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Problems of Electrical Machines and Apparatus Perfection. The Theory and Practice.* 20 (1063) (2014): 13-24. Print. 2. *Pantelyat M.G., Gurentsov Ju.V.* "A FE technique for induction cooker electromagnetic field distribution computer simulation". *Bulletin of NTU "KhPI".*

Series: Problems of Electrical Machines and Apparatus Perfection. The Theory and Practice. 41 (1084) (2014): 16-24. Print. **3.** Holman J.P. *Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill, 2002. Print. **4.** Doležel I., Karban P., Mach F. "Induction heating of rotating nonmagnetic billet in magnetic field produced by high-parameter permanent magnets". *Electrical Engineering & Electromechanics*. 2 (2014): 32-36. Print. **5.** Pantelyat M.G., Féliachi M. "Magneto-thermo-elastic-plastic simulation of inductive heating of metals". *The European Physical Journal Applied Physics*. 17 (2002): 29-33. Print. **6.** Tutorial EleFAnT2D. Web. <<http://www.igte.tugraz.at/de/elefant/elefant.html>>.

Надійшла (received) 25.11.2014



Пантел'ят Михайло Гаррійович, старший викладач кафедри "Електричні апарати" Національного технічного університету "ХПІ". В 1985 р. закінчив Харківський політехнічний інститут за спеціальністю "Інженерна електрофізика". Кандидат фізико-математичних наук (1991 р., спеціальність "Механіка деформівного твердого тіла). Основні наукові інтереси: комп'ютерне моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів в електромагнітних пристроях різного призначення.



Трофімов Андрій Володимирович, студент електромашинобудівного факультету Національного технічного університету "ХПІ", група ЕМБ-20АМ. Область інтересів – дослідження, розрахунок і проектування сучасної електропобутової техніки.