

И.А. КОСТЮКОВ, аспирант, НТУ "ХПИ"

**ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИ ОЦЕНКЕ КОМПОНЕНТ
НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СТАЛЬНОЙ
ПРОВОЛОКЕ БРОНИ СИЛОВОГО КАБЕЛЯ**

С применением полинома Чебышева получены выражения для достаточно точной аппроксимации распределения радиальной и тангенциальной составляющих напряженности магнитного поля на поверхности стальной проволоки брони силового кабеля. Повышение точности достигается путем соответствующего выбора узлов интерполяции.

Ключевые слова: полином Чебышева, радиальная и тангенциальная составляющие напряженности магнитного поля, броня силового кабеля.

Введение. В [1, 2], используя известные аналитические решения уравнения Гельмгольца, были найдены выражения для непосредственной оценки радиальной и тангенциальной составляющих напряженности магнитного поля и магнитной индукции в проволоке брони силового кабеля в приближении плоскопараллельного поля, то есть без учета реальной спиральной геометрии проволоки. Граничное условие для указанных компонент было получено вычислением искомой составляющей напряженности поля в нескольких точках, с последующей аппроксимацией с использованием полинома Лагранжа, отсчет полярного угла производился от оси соединяющей центры кабеля и проволоки. При анализе указанных решений непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что точность найденных решений не велика, характер сходимости полученных рядов не дает возможности достаточно точно оценивать искомые составляющие напряженности магнитного поля даже на границе проволоки. При использовании известного аналитического решения уравнения Гельмгольца такие несоответствия могут быть вызваны, по-видимому, погрешностями, связанными с аппроксимацией граничного условия.

Необходимость аппроксимации связана с желанием получить наиболее удобные формулы для численных расчетов, поскольку распределение компонент напряженности магнитного поля в стальной проволоке описывается довольно громоздкими выражениями.

Целью работы является повышение точности моделирования радиальной и тангенциальной составляющих напряженности магнитного поля с использованием полинома Чебышева.

Основной материал. При аппроксимации полиномом Лагранжа остаточный член полинома $E_n(\theta)$ определяется по следующей формуле [3]:

$$E_n(\theta) = \frac{(\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1)\dots(\theta - \theta_n) f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad (1)$$

где c – некоторая точка на промежутке $\theta \in [0; 2\pi]$ (для данного случая).

Следует отметить, что приведенная формула (1) справедлива для любой точки на промежутке, на котором определена функция, недостатком этой формулы является неудобство ее применения и недостаточная информативность, поскольку с ее помощью можно получить погрешность только в какой-либо определенной точке, поэтому на практике чаще применяют оценку для максимальной погрешности аппроксимации, которую можно получить из формулы (1).

Учитывая сказанное, чаще используется верхняя граница максимальной погрешности при использовании полинома Лагранжа.

$$E_n(\theta) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max |\Pi_{n+1}(\theta)|, \quad (2)$$

где

$$\Pi_{n+1}(\theta) = (\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)\dots(\theta - \theta_n), \quad (3)$$

то есть некоторый полином $n+1$ степени.

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\theta)| \quad (4)$$

Таким образом, M_{n+1} – максимум производной $n+1$ порядка от функции которая аппроксимируется, на интервале ее определения.

Приведенные формулы для максимальной погрешности на интервале аппроксимации получают из выражения для остаточного члена полинома Лагранжа путем выбора наиболее неблагоприятных параметров в этом члене, то есть максимального значения производной $n+1$ степени от функции, которая аппроксимируется, а также максимума полинома $\Pi_{n+1}(\theta)$, однако поскольку, в общем случае, максимумы $\Pi_{n+1}(\theta)$ и M_{n+1} достигаются в различных точках интервала, то следует отметить что приведенная выше оценка не является наиболее точной, существуют более точные оценки максимальной погрешности, хотя и не настолько удобные в реализации.

Повышение точности интерполяции обычно обеспечивают при использовании полиномов Чебышева, которые определяются по следующей формуле (тригонометрическое представление):

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad (5)$$

В формуле (5) $x \in [-1; 1]$.

Известно, что для нахождения нулей полинома (5) (узлы Чебышева), на замкнутом интервале $x \in [-1:1]$ справедлива следующая формула [3]:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad (6)$$

В формуле (6) $k = 0, 1, \dots, n-1$.

С использованием узлов Чебышева обеспечивают минимизацию верхней границы остаточного члена интерполяционного полинома, чем, соответственно, повышают точность аппроксимации. Поскольку в формуле (2) невозможно никаким образом регулировать значения M_{n+1} минимизация остаточного члена обеспечивается путем соответствующего выбора узлов интерполяции в полиноме $\Pi_{n+1}(\theta)$. В качестве узлов интерполяции на интервале $[a:b]$ принимают узлы Чебышева [3]:

$$\theta_k = t_k \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}, \quad (7)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. В формуле (7) t_k – нули полинома Чебышева на интервале $[-1:1]$.

В формуле (7) при аппроксимации нули полинома Чебышева $n+1$ порядка можно находить с использованием формулы [3]:

$$t_k = \cos\left(\left(2 \cdot N + 1 - 2 \cdot k\right) \frac{\pi}{2n+2}\right), \quad (8)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Полиномы Чебышева 6 и 7 порядка имеют вид [3]:

$$T_6(\theta) = 32\theta^6 - 48\theta^4 + 18\theta^2 - 1 \quad (9)$$

$$T_7(\theta) = 64\theta^7 - 112\theta^5 + 56\theta^3 - 7\theta \quad (10)$$

Учитывая известное рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева [3]:

$$T_k(\theta) = 2\theta T_{k-1}(\theta) - T_{k-2}(\theta), \quad (11)$$

Можно записать выражение для, используемого в дальнейшем, полинома 8 порядка:

$$T_8(\theta) = 128\theta^8 - 256\theta^6 + 160\theta^4 - 32\theta^2 + 1 \quad (12)$$

На рис. 1 показано поведение полиномов (9, 10, 12), соответственно, кривая 1, кривая 2, кривая 3.

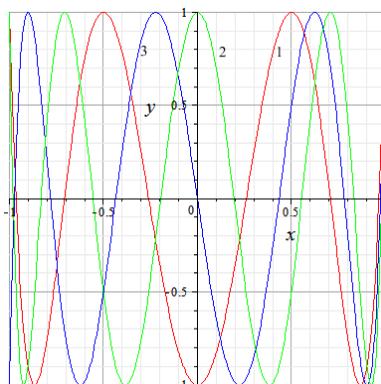


Рис. 1 – Полиномы Чебышева: $T_6(x)$ (кривая 1), $T_7(x)$ (кривая 2), $T_8(x)$ (кривая 3)

При аппроксимации полиномом 8 порядка использовались узлы, совпадающие с нулями полинома 9 порядка, на интервале $x \in [-1:1]$. Нули полинома 9 порядка, рассчитанные по формуле (8), на указанном выше интервале соответственно равны: $x_0 = -0,984807$, $x_1 = -0,866025$, $x_2 = -0,642787$, $x_3 = -0,342020$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0,342020$, $x_6 = 0,642787$, $x_7 = 0,866025$, $x_8 = 0,984807$. Узлы интерполяции, пересчитанные для промежутка $\theta \in [0:2\pi]$ по формуле (7), равны: $\theta_0 = 0,0159\pi$, $\theta_1 = 0,13397\pi$, $\theta_2 = 0,357213\pi$, $\theta_3 = 0,65798\pi$, $\theta_4 = \pi$, $\theta_5 = 1,34202\pi$, $\theta_6 = 1,642787\pi$, $\theta_7 = 1,86602\pi$, $\theta_8 = 1,9848\pi$.

Геометрические параметры, используемые в дальнейшем при определении компонент напряженности магнитного поля, приведены на рис. 2.

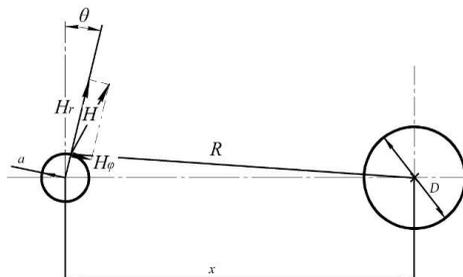


Рис. 2 – Схема к определению геометрических параметров для вычисления тангенциальной и радиальной составляющих напряженности магнитного поля на поверхности проволоки

В соответствии со схемой, приведенной на рис. 2, радиальная и тангенциальная составляющие напряженности магнитного поля вычислялись из формул:

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi} \frac{xa \sin \theta}{(x^2 + a^2 - 2xa \sin \theta)} \quad (13)$$

$$H_r = \frac{I}{2\pi} \frac{x \cos \theta}{(x^2 + a^2 - 2xa \sin \theta)} \quad (14)$$

Формулы (13), (14) использовались в [4] для вычисления, соответственно, тангенциальной и радиальной составляющих напряженности магнитного поля на поверхности экранов трехфазного токопровода, при соединении экранов только с одной стороны, то есть при отсутствии продольных токов. Применение этих формул здесь оправдано, с учетом одинаковой геометрии, с точки зрения вычисления компонент напряженности поля на поверхности сплошной проволоки и полого экрана, в приближении плоскопараллельного поля. В дальнейшем расчеты будут проводиться при следующих геометрических параметрах, показанных на рис. 2, диаметр проволоки: $2a = 3$ мм, расстояние между осями проволоки и жилы кабеля $x = 27$ мм, диаметр жилы кабеля $D = 18$ мм. Ток жилы примем равным 100 А (действующее значение тока). В формулах (13), (14) учитывается действующее значение тока жилы, при рассмотрении полей, меняющихся по гармоническому закону, рассматривая в дальнейшем комплексные амплитуды напряженности магнитного поля и магнитной индукции в формулах (13), (14) будем учитывать амплитудное значение тока жилы. Кроме того, при определении напряженности магнитного поля на поверхности проволоки будем исходить из того что ток жилы и напряженность магнитного поля совпадают по фазе.

Аппроксимация полиномом Чебышева радиальной составляющей напряженности магнитного поля при использовании точек $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8$ в качестве узлов интерполирования приведена на рис. 3. На этом же рисунке приведена аппроксимация полиномом Лагранжа, используемая в [2]. Значения параметра R (расстояние между центром жилы и текущей точкой поверхности), для указанных точек соответственно равны: $R_0 = 26,96$ мм, $R_1 = 26,42$ мм, $R_2 = 25,65$ мм, $R_3 = 25,65$ мм, $R_4 = 27$ мм, $R_5 = 28,35$ мм, $R_6 = 28,35$ мм, $R_7 = 27,64$ мм, $R_8 = 27,11$ мм.

Распределение радиальной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности проволоки показано на рис. 3.

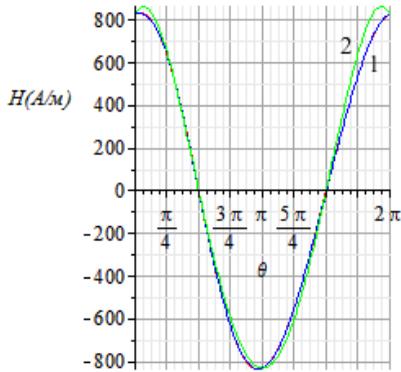


Рис. 3 – Распределение радиальной компоненты напряженности магнитного поля на поверхности проволоки: 1 – аппроксимация полиномом Чебышева и точное значение, 2 – аппроксимация полиномом Лагранжа

Кривые, приведенные на рис. 3, свидетельствуют об удачной аппроксимации. Применение полинома Чебышева здесь позволяет аппроксимировать граничное условие без существенных погрешностей.

Разность между двумя аппроксимирующими полиномами показана на рис. 4. Из данных, приведенных на указанном рисунке, следует весьма существенная разница в поведении двух полиномов так, при определении радиальной компоненты напряженности магнитного поля на поверхности проволоки разность между двумя полиномами в некоторых точках может превышать 100 А/м.

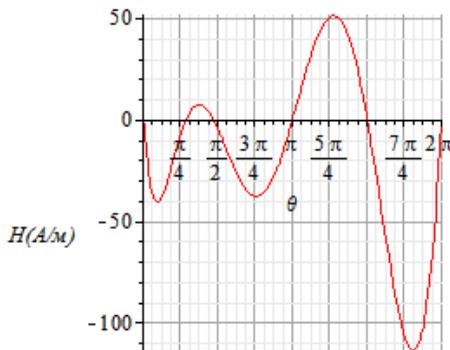


Рис. 4 – Разность между двумя аппроксимирующими полиномами

Распределение тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности проволоки показано на рис. 4. При вычислении тангенциальной составляющей использовались те же узлы интерполяции, что и при аппроксимации радиальной составляющей.

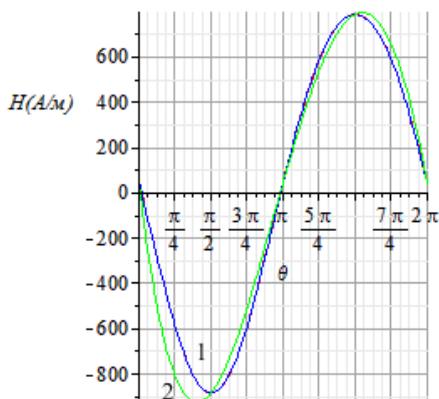


Рис. 5 – Распределение тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля на поверхности проволоки: 1 – аппроксимация полиномом Чебышева и точное значение, 2 – аппроксимация полиномом Лагранжа

Разность между двумя аппроксимирующими полиномами показана на рис. 6.

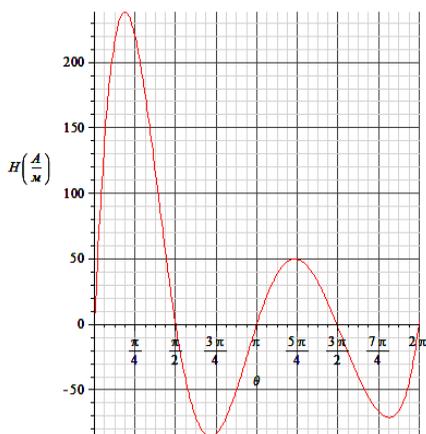


Рис. 6 – Разность между двумя аппроксимирующими полиномами

Как видно из данных, приведенных на рис. 6, разность между двумя аппроксимирующими полиномами может превышать 200 А/м.

Выводы. С помощью применения полиномов Чебышева удалось достигнуть достаточно точной аппроксимации распределения радиальной и тангенциальной компонент напряженности магнитного поля на поверхности проволоки брони силового кабеля. Приближающий интерполяционный полином 8 порядка, как видно из данных приведенных на рис. 3, и рис. 5, практически совпадает с точным значением приближаемых функций. Повышение точности аппроксимации здесь достигается путем соответствующего выбора узлов интерполяции.

Список литературы: 1. Костюков И.А. Продольные и вихревые токи в экранах и броне однофазных силовых кабелей / И.А. Костюков // Электрические сети и системы. – 2013. – № 5. – С. 76-80. 2. Костюков И. А. Приближенная оценка радиальной составляющей магнитной индукции и напряженности магнитного поля в стальной проволоке брони силового кабеля / И.А. Костюков // Вісник НТУ "ХПІ" Тематичний випуск: Енергетика: Надійність та енергоефективність. – 2013. – № 59 (1032). – С. 70-78. 3. Мэтьюз Д.Г. Численные методы. Использование MATLAB / Д.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. – 720 с. 4. Перекалин М. А. Исследование индуктированных токов в цилиндрических алюминиевых кожухах трехфазного токопровода / М.А. Перекалин, Р.И. Караев // Известия высших учебных заведений. Энергетика. – 1960. – № 8. – С. 55-65.

Bibliography (transliterated): 1. Kostjukov I.A. "Prodol'nye i vihrevye toki v jekranah i brone odnofaznyh silovyh kabelej". *Jelektricheskie seti i sistemy*. No 5. 2013. 76-80. Print. 2. Kostjukov I.A. "Priblizhennaja ocenka radial'noj sostavljajushhej magnitnoj indukcii i naprjazhennosti magnitnoho polja v stal'noj provoloke broni silovogo kabelja." *Visnik NTU "HPI". Ser.: Energetika: Nadijnist' ta energoefektivnist'*. No 59 (1032). Kharkiv: NTU "HPI", 2013. 70-78. Print. 3. Mjet'juz D.G., Fink K.D. *Chislennye metody. Ispol'zovanie MATLAB*. Moscow: Izdatel'skij dom "Vil'jams", 2001. Print. 4. Perekalin M.A., Karaev R.I. "Issledovanie induktirovannyh tokov v cilindricheskikh aljuminievych kozhuhah trehfaznogo tokoprovoda". *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Jenergetika*. No 8. 1960. 55-65. Print.

Поступила (received) 23.04.2014