УДК 621.317.44

А.В. ГЕТЬМАН, канд. техн. наук, Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, Харьков
А.В. КОНСТАНТИНОВ, аспирант, Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, Харьков

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВОЙ ОБМОТКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТА

Рассмотрены аналитические модели магнитного поля кругового тока, однослойного соленоида и токовой цилиндрической обмотки, построенные на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала. Показана эквивалентность применения двух типов цилиндрических гармоник для построения модели магнитного поля цилиндрических осесимметричных источников.

Ключевые слова: модели магнитного поля, однослойный соленоид, цилиндрические осесимметричные источники.

Введение. На сегодняшний день существует большое разнообразие теоретических и эмпирических средств разработки электромагнитов [1], однако задачи об улучшении и оптимизации их характеристик являются актуальными. К таким задачам [2] относится выбор оптимальной конструкции и энергомассовых характеристик электромагнитов, используемых в качестве исполнительных органов (источников магнитного момента) в системе ориентации космического аппарата (КА). Практическое решение этой задачи усложнено большим количеством варьируемых параметров – характеристик электромагнита, что обуславливает разработку аналитической модели магнитного момента электромагнита, позволяющей проводить комплексный анализ и поиск оптимальной конструкции.

Для используемых в качестве магнитных исполнительных органов КА электромагнитов характерна конструкция в виде цилиндрической токовой обмотки содержащей внутри цилиндрический сердечник из магнитомягкого материала с большим значением магнитной проницаемости. Следует заметить, что основная часть главной рабочей характеристики такого электромагнита – магнитный момент, создается именно сердечником (более 90 %). В свою очередь для создания точной аналитической модели намагниченности и магнитного момента сердечника необходимо использовании математического аппарата цилиндрических гармоник скалярного потенциала магнитного поля.

При этом магнитное поле токовой обмотки, индуцирующей намагниченность сердечника, также должно быть представлено на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала. С этой целью в работе рассмотрены аналитические модели магнитного поля токовой обмотки электромагнита на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала.

Исходные положения. В качестве теоретической основы модели магнитного поля токовой обмотки в работе используется представление для векторного потенциала магнитной индукции создаваемой круговым витком с током I [3]:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\partial \vec{L}}{|\vec{r}|}\ , \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – расстояние от элемента контура $\partial \vec{L}$ до точки наблюдения магнитной индукции.

Тогда для среды с относительной магнитной проницаемостью равной единице (в первом приближении в воздухе) для проекций напряженности магнитного поля кругового тока, аксиальная ось которого совпадает с осью аппликат, а центр витка имеет координату z’, справедливы выражения:

$$H_\rho = -\frac{I}{4\pi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \int_L \frac{\partial L_\varphi}{|\vec{r}|}\right), \tag{2}$$

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \int_L \frac{\partial L_\varphi}{|\vec{r}|}\right), \tag{3}$$

где ρ, φ, z – цилиндрические координаты точки наблюдения магнитного поля.

Для перехода к представлению магнитного поля на основе цилиндрических гармоник используем два известных [4] выражения для обратного расстояния в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2-\delta_n^0\right)\cos n(\varphi-\varphi')\left(\int_0^{\infty} K_n(\lambda\rho) I_n(\lambda\rho')\cos\lambda(z-z')d\lambda\right), \tag{4}$$

где $I_n(\lambda\rho)$ и $K_n(\lambda\rho)$ – соответственно модифицированные функция Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда).

Второе выражение для обратного расстояния содержит $J_n(\lambda\rho)$ –

обычные функции Бесселя:

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \delta_n^0\right) \cos n\left(\varphi - \varphi'\right) \left(\int_0^{\infty} J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho') e^{-\lambda|z-z'|} d\lambda \right). \tag{5}$$

Для поиска вида U – скалярного потенциала магнитного поля использовалась его связь с напряженностью магнитного поля [5, 6]:

$$\vec{H} = -gradU \,. \tag{6}$$

Модель на основе модифицированных функций Бесселя. Для скалярного потенциала магнитного поля кругового тока на основе (2), (3), (4), (6) в результате интегрирования по элементам замкнутого контура могут быть получены выражения:

$$U_{внутри} = -\frac{IR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_0(\lambda\rho) \sin\left(\lambda(z - z')\right) d\lambda, \ \rho < R \,, \tag{7}$$

$$U_{вне} = \frac{IR}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda\rho) I_1(\lambda R) \sin\left(\lambda(z - z')\right) d\lambda, \ \rho > R \,, \tag{8}$$

где R – радиус кругового витка с током.

Полученные соотношения (7) и (8) могут быть положены в основу модели магнитного поля бесконечнотонкого соленоида, аксиальная ось которого совпадает с осью аппликат, а координаты нижнего и верхнего торцов $-H/2$ и $+H/2$ соответственно.

При этом линейная плотность тока J соленоида может быть представлена через ток кругового витка с током dI:

$$dI = Jdz' \,. \tag{9}$$

Проведя интегрирование по z' для скалярного потенциала магнитного поля бесконечнотонкого соленоида получим выражения:

$$U_{внутри} = -\frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} K_1(\lambda R) I_0(\lambda\rho) \sin\left(\lambda \frac{H}{2}\right) \sin(\lambda z) d\lambda, \ \rho < R \,, \tag{10}$$

$$U_{вне} = \frac{2JR}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} K_0(\lambda\rho) I_1(\lambda R) \sin\left(\lambda \frac{H}{2}\right) \sin(\lambda z) d\lambda d\lambda, \ \rho > R \,. \tag{11}$$

Перейдем теперь к соленоиду реальной толщины – токовой цилиндрической обмотке с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2. Скалярный потенциал цилиндрической обмотки с эффективной плотностью тока j, получаемой отношением полного тока I протекающего через поперечное сечение к площади сечения обмотки, может быть записан в виде:

$$U_{внутри}=-j\int\limits_0^\infty W1(\lambda R)I_0(\lambda\rho)\sin\left(\lambda\frac{H}{2}\right)\sin(\lambda z)d\lambda,\ \rho<R1$$

$$W1(\lambda R)=\frac{2}{\pi\lambda}\int\limits_{R1}^{R2}RK_1(\lambda R)dR=\frac{R}{\lambda^2}\left\{K_1(\lambda R)L_0(\lambda R)+L_1(\lambda R)K_0(\lambda R)\right\}\Big|_{R1}^{R2} \quad ,(12)$$

$$U_{вне}=j\int\limits_0^\infty W2(\lambda R)K_0(\lambda\rho)\sin\left(\lambda\frac{H}{2}\right)\sin(\lambda z)d\lambda,\ \rho>R2$$

$$W2(\lambda R)=\frac{2}{\pi\lambda}\int\limits_{R1}^{R2}RK_1(\lambda R)dR=\frac{R}{\lambda^2}\left\{I_1(\lambda R)L_0(\lambda R)-L_1(\lambda R)I_0(\lambda R)\right\}\Big|_{R1}^{R2} \quad ,\ (13)$$

где $L_n(\lambda\rho)$ – модифицированные функции Струве.

Для области, содержащей токи ($R_1<\rho<R_2$), скалярный потенциал примет вид:

$$U_{ток}=-j\int\limits_0^\infty W1(\lambda\rho)I_0(\lambda\rho)\sin\left(\lambda\frac{H}{2}\right)\sin(\lambda z)d\lambda+$$

$$+j\int\limits_0^\infty W2(\lambda\rho)K_0(\lambda\rho)\sin\left(\lambda\frac{H}{2}\right)\sin(\lambda z)d\lambda,$$

$$W1(\lambda\rho)=\frac{R}{\lambda^2}\left\{K_1(\lambda R)L_0(\lambda R)+L_1(\lambda R)K_0(\lambda R)\right\}\Big|_{R1}^{\rho}\ . \quad (14)$$

$$W2(\lambda\rho)=\frac{R}{\lambda^2}\left\{I_1(\lambda R)L_0(\lambda R)-L_1(\lambda R)I_0(\lambda R)\right\}\Big|_{\rho}^{R2}$$

При этом переход к эффективной плотности тока j в цилиндрической обмотке от линейной плотности тока J бесконечнотонкого соленоида произведен на основании выражения:

$$dJ=jdR\,. \quad (15)$$

Модель на основе обычных функций Бесселя. По аналогии с полученными выше результатами для описания магнитного поля могут быть использованы цилиндрические гармоники, содержащие обычные функции Бесселя. Для этого следует воспользоваться представлением для обратного расстояния (5) при подстановке в (2) и (3), а также учесть непрерывность функции скалярного потенциала магнитного поля кругового тока, для которого справедливо выражение:

$$U = sign(z-z')\frac{IR}{2}\int_0^{\infty} J_1(\lambda R)J_0(\lambda \rho)e^{-\lambda|z-z'|}d\lambda - sign(z-z')\frac{I}{2}. \qquad (16)$$

Тогда для скалярного потенциала магнитного поля бесконечно-тонкого соленоида после интегрирования (16) с учетом (9) получим выражения:

$$U_{внутри} = JR\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda R)J_0(\lambda \rho)e^{-\lambda\frac{H}{2}} \sinh(\lambda z)d\lambda - Jz,\ |z| < H/2, \qquad (17)$$

$$U_{вне} = sign(z)JR\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda R)J_0(\lambda \rho)e^{-\lambda|z|} \sinh(\lambda\frac{H}{2})d\lambda - Jz,\ |z| > H/2. \qquad (18)$$

На основании (17), (18) с использованием (15) для скалярного потенциала токовой цилиндрической обмотки можно получить представления:

$$\begin{aligned} U_{внутри} &= j\int_0^{\infty} W(\lambda R)J_0(\lambda \rho)e^{-\lambda\frac{H}{2}} \sinh(\lambda z)d\lambda - jz(R2-R1),\ |z| < H/2 \\ W(\lambda R) &= \frac{1}{\lambda}\int_{R1}^{R2} RJ_1(\lambda R)dR = \frac{\pi R}{2\lambda^2}\left\{K_1(\lambda R)H_0(\lambda\rho) + H_1(\lambda R)K_0(\lambda\rho)\right\}\Big|_{R1}^{R2} \end{aligned} \quad , (19)$$

$$\begin{aligned} U_{вне} &= sign(z)\, j\int_0^{\infty} W(\lambda R)J_0(\lambda \rho)e^{-\lambda|z|} \sinh(\lambda\frac{H}{2})d\lambda - jz(R2-R1),\ |z| > H/2 \\ W(\lambda R) &= \frac{1}{\lambda}\int_{R1}^{R2} RJ_1(\lambda R)dR = \frac{\pi R}{2\lambda^2}\left\{K_1(\lambda R)H_0(\lambda\rho) + H_1(\lambda R)K_0(\lambda\rho)\right\}\Big|_{R1}^{R2} \end{aligned} \quad ,(20)$$

где $H_n(\lambda\rho)$ – функции Струве.

Сравнение и обсуждение результатов. Полученные выражения для скалярного потенциала представленного на основе обычных функций Бесселя полностью эквивалентны соответствующим выражениям на основе модифицированных функций Бесселя, что подтверждается прямым расчетом потенциала. В частности для представления магнитного поля токовой цилиндрической обмотки с одинаковым успехом могут быть использованы как (12)-(14), так и (19)-(20) в зависимости от используемого типа функций Бесселя в модели намагниченности сердечника электромагнита.

Кроме того, для проверки может быть использовано аналитическое решение для напряженности магнитного поля, создаваемого на аксиальной оси токовой цилиндрической обмотки [7]:

$$H_z(z) = \frac{j}{2}\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{H}{2} - z\right)\left[\ln\left(\frac{R2 + \sqrt{R2^2 + \left(\frac{H}{2} - z\right)^2}}{R1 + \sqrt{R1^2 + \left(\frac{H}{2} - z\right)^2}}\right)\right] + \\ &+\left(\frac{H}{2} + z\right)\left[\ln\left(\frac{R2 + \sqrt{R2^2 + \left(\frac{H}{2} + z\right)^2}}{R1 + \sqrt{R1^2 + \left(\frac{H}{2} + z\right)^2}}\right)\right] \end{aligned} \right\}. \qquad (21)$$

Результаты расчета магнитного поля по (21), а также на основе (6) и полученных выражений для скалярного потенциала (12) или (19) совпадают с хорошей точностью (погрешность менее 0,1 %) даже для небольших (около 200) значений верхнего предела интегралов в (12) или (19).

Анализ результатов полученных для модели магнитного поля бесконечнотонкого соленоида совместно с результатами работ [8, 9] для однородно намагниченного вдоль аксиальной оси цилиндра показывает полную эквивалентность применения цилиндрических гармоник как на основе модифицированных, так и на основе обычных функций Бесселя. В обоих случаях разница между потенциалом магнитного поля внутри однородно намагниченного цилиндра и скалярным потенциалом внутри бесконечно тонкого соленоида равна потенциалу равномерного поля (второе слагаемое в (17)). Главное отличие состоит в том, что потенциал однородно намагниченного цилиндра описывается одним слагаемым при использовании цилиндрических гармоник на основе обычных функций Бесселя, а потенциал бесконечнотонкого соленоида описывается одним слагаемым при использовании цилиндрических гармоник на основе модифицированных функций Бесселя

Выводы. Полученные представления скалярного потенциала магнитного поля на основе цилиндрических гармоник для токовой обмотки электромагнита могут быть использованы для построения аналитической модели намагниченности сердечника электромагнита цилиндрической формы и проведения оптимизации его конструкции по главному критерию – величине создаваемого магнитного момента.

Список литературы: **1**. *Король Е.Г., Лупиков В.С., Рудас Ю.Д.* Оптимизация электромагнита компенсатора с ферромагнитным сердечником // Вестник Национального технического ун-та "ХПИ". – 2011. – № 12. – С. 50-59. **2**. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с. **3**. *Smythe W.* Static and Dynamic Electricity. – ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p. **4**. *Грэй Э, Мэтьюс Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механики // М.: IL, 1953. – 372 с. **5**. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 539 с. **6**. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 774 с. **7**. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма. – М.: Высш. шк., 1991. – 288 с. **8**. *Гетьман А.В., Константинов А.В.* Цилиндрические гармоники магнитного поля однородно намагниченного цилиндра // Електротехніка і електромеханіка. – 2011. – № 5. – С. 51-53. **9**. *Гетьман А.В., Константинов А.В.* Аналитическое представление магнитного поля соленоида с помощью цилиндрических гармоник // Електротехніка і електромеханіка. – 2010. – № 5. – С. 43-45.

Поступила в редколлегию 16.08.12

УДК 621.317.44

Цилиндрические гармоники скалярного потенциала магнитного поля токовой обмотки электромагнита / Гетьман А.В., Константинов А.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми удосконалення електричних машин і апаратів. Теорія і практика. – Х.: НТУ "ХПІ", 2012. – № 49 (955). – С. 66-72. Бібліогр.: 9 назв.

Розглянуто аналітичні моделі магнітного поля кругового струму, одношарового соленоїда і циліндричної обмотки, побудовані на основі циліндричних гармонік скалярного потенціалу. Показана еквівалентність застосування двох типів циліндричних гармонік для побудови моделі магнітного поля циліндричних віссесиметричних джерел.

Ключові слова: моделі магнітного поля, одношаровий соленоїд, циліндричні осесиметричні джерела.

Analytic models of the magnetic field of a circular current, a single-layer solenoid and a cylindrical coil, built on the base of cylindrical harmonics of a scalar potential are considered. The equivalence of utilization of two types of cylindrical harmonics to build models of the magnetic field of cylindrical axisymmetric sources is shown.

Keywords: magnetic field models, single-layer solenoid, cylindrical axisymmetric sources.